HARMONISCHE RUIMTEN

E.M.J. BERTIN

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit Utrecht
1974

§ 1. Inleiding, preliminaria

1.0. Citaat uit [16]: La théorie du potentiel qui n'était d'abord qu'un chapitre de physique mathématique, a posé depuis cent cinquante ans des problèmes mathématiques difficiles et délicats qui ont attiré les mathématiciens les plus célèbres comme Gauss, Hilbert ou Poincaré.

1.1. De term potentiaaltheorie omvat vele mathematische theorieën, zowel axiomatische als meer concrete. Alle takken van de huidige potentiaaltheorie vinden echter hun gemeenschappelijke oorsprong in de vergelijking van Laplace, ofwel de klassieke potentiaaltheorie. Van oorsprong was dit een onderdeel van de mathematische fysica. Termen als capaciteit, potentiaal, energie e.d. herinneren nog aan deze periode. In de eerste 40 jaren van deze eeuw ontwikkelde de potentiaaltheorie zich tot een tak van de functietheorie. In de periode 1940-1960 worden op grote schaal methoden uit de functionaalanalyse, harmonische analyse en maattheorie gebruikt. In de periode na 1960 ontstaan de diverse axiomatische theorieën.

1.2. Reeds in een vroeg stadium worden omgekeerd de resultaten van de potentiaaltheorie gebruikt in andere gebieden, zoals de complexe functietheorie, de theorie der Riemann-oppervlakken en de leer der Brownse beweging. Ook de hedendaagse axiomatische theorie staat in nauwe wisselwerking met andere - al of niet abstracte - theorieën, zoals die van de Markovprocessen, convexiteit, complexe functies in meer variabelen en partiële differentiaalvergelijkingen.

1.3. Onderwerp van dit college is die tak van de axiomatische potentiaaltheorie die ook vaak theorie der harmonische ruimten genoemd wordt. Het college valt uiteen in twee delen:

1. Een dogmatische, maar elementaire, inleiding in de axiomatische theorie, ongeveer samenvallend met de eerste hoofdstukken van

[17]. Om de axiomatische theorie te motiveren zal deze regelmatig afgewisseld worden met historische opmerkingen en resultaten, betrekking hebbend op de 3-dimensionale klassieke potentiaaltheorie. Het nummer van deze passages wordt vooraf gegaan door een K.

2. Een bewijs van het feit dat de oplossingen van een elliptische differentiaalvergelijking een (niet triviaal) model leveren voor de axiomatische theorie.

Passages die voorzien zijn van een * zijn bedoeld voor de meer geïnteresseerde lezer. □ geeft het einde van een bewijs aan.

1.4. De verzameling van open delen van een topologische ruimte X wordt steeds aangegeven met $\mathcal{U}$ (of $\mathcal{U}_X$ o.i.d.). We gebruiken de notaties

$$\mathcal{U}_c = \{U \in \mathcal{U} : \bar{U} \text{ compact}\}$$

$$\mathcal{U}(A) = \{U \in \mathcal{U} : A \subset U\},\ \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(\{x\}).$$

De verzameling der compacte delen van X wordt aangegeven met $\mathcal{K}$, terwijl voor $A \subset X$

$$\mathcal{K}(A) = \{K \in \mathcal{K} : K \subset A\}.$$

Voor de rand van $A \subset X$ schrijven we ∂A. $\mathcal{C}(X)$ is de verzameling der continue (reële) functies op X en $\mathcal{C}_c(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : \operatorname{supp}(f)$ compact$\}$. Vaak zal hierbij X een deelruimte zijn van een andere topologische ruimte Y, voorzien van de geïnduceerde topologie. Als $\mathcal{F}$ een verzameling van functies op A is en $\mathcal{G}$ een verzameling van functies op $B \subset A$, dan betekent $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ dat f - tenminste - gedefinieerd is op A, $\operatorname{rest}_A f \in \mathcal{F}$ en $\operatorname{rest}_B f \in \mathcal{G}$. Voor $f, g \in \mathcal{F}$ schrijven we $f \geq g$ indien $f(x) \geq g(x)$ voor elke $x \in A$ en $f > g$ indien $f(x) > g(x)$ voor elke $x \in A$ (!!). $\mathcal{F}_+$ is de verzameling $\{f \in \mathcal{F} : f \geq 0\}$. $1_B f$ is de functie, gelijk aan f op B, gelijk aan 0 elders. We gebruiken de conventies $0.\infty = \infty.0 = 0.(-\infty) = (-\infty).0 = 1/\infty = 0$ en $\infty - \infty = -\infty + \infty = \infty + \infty = \infty$.

Definitie

$\mathcal{F}$ *scheidt de punten* van A indien

$$x,y \in A,\ x \neq y \ \Rightarrow\ \exists f,g \in \mathcal{F}\ \ f(x)g(y) \neq f(y)g(x).$$

Opgave

Als $\mathcal{F}$ de constante functies bevat, is dit equivalent met

$$x,y \in A,\ x \neq y \ \Rightarrow\ \exists f \in \mathcal{F}\ \ f(x) \neq f(y).$$

1.5. Voor semi-continu naar beneden (boven) worden de afkortingen s.c.i. (s.c.s.) gebruikt. Zie bijv. het dictaat functionaalanalyse I voor deze en andere hier niet gedefinieerde termen. Voor X locaal compact geldt

f s.c.i. op X $\Leftrightarrow$ $f = \sup\{g:\ g \in \mathcal{C}_c(X),\ g \leq f\}$ $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda\ \{x:\ f(x) > \lambda\}$ is open in X.

Voor elke functie f op een deel A van X bestaat de grootste s.c.i. minorant $\hat{f}$ van f op $\bar{A}$ (de s.c.i. *geregulariseerde* van f) en $\hat{f}(x) = \liminf_{A \ni y \to x} f(y)$ voor $x \in \bar{A}$. Merk op dat elke s.c.i. functie $f > -\infty$ naar beneden begrensd is op elke compacte $K \subset A$.

1.6. Voor de gebruikte (elementaire) theorie der Radonmaten op een locaal compacte ruimte X wordt verwezen naar functionaalanalyse I of naar de betreffende delen van Bourbaki. We gebruiken echter een uitgebreidere definitie voor het begrip *bovenintegraal*:

Definitie

1. Voor f s.c.i., $f > -\infty$, $f \geq 0$ buiten een compactum K is

$$\mu^*(f) = \int^* f d\mu = \sup\{\mu(g):\ g \in \mathcal{C}_c(X),\ g \leq f\}.$$

2. Voor f willekeurig is

$$\mu^*(f) = \int^* f d\mu = \inf\{\mu^*(g):\ g \text{ s.c.i.},\ g > -\infty,\ g \geq 0 \text{ buiten een compactum},\ g \geq f\}.$$

3. Analoge definities voor de benedenintegraal $\mu_*(f) = -\mu^*(-f)$.

Stelling

Een numerieke functie f is integreerbaar (met $\mu(f) = \mu^*(f)$) precies dan als $\mu^*(f)$ eindig is en $\mu^*(f) = \mu_*(f)$. (Bourbaki, Intégration, chap. IV, § 4, ex. 5-6.)

1.7. Volledigheidshalve geven we nog een korte schets van de theorie der filters.

Definitie

Zij X een verzameling en $\mathcal{F}, \mathcal{B}$ verzamelingen van delen van X.

1. $\mathcal{F}$ heet een filter op X als
   a. $F \in \mathcal{F},\ \mathcal{G} \supset F \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{F}$
   b. $\emptyset \notin \mathcal{F} \neq \emptyset$
   c. $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{B}$ heet een filterbasis op X indien
   a. $B, C \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists D \in \mathcal{B} \quad D \subset B \cap C$
   b. $\emptyset \notin \mathcal{B} \neq \emptyset$
3. Een filter $\mathcal{F}$ heet fijner dan een filter $\mathcal{G}$ indien $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
4. Het filter $\mathcal{F}$ heet een ultrafilter indien er geen echt fijner filter bestaat. $\{A \subset X \mid x \in A\}$
5. Zij X topologisch. Een punt $x \in X$ heet limiet van een filter $\mathcal{F}$ (of van een filterbasis $\mathcal{B}$) indien elke omgeving van x een element van $\mathcal{F}$ (van $\mathcal{B}$) bevat, d.w.z. indien $\mathcal{F}$ fijner is dan het filter der omgevingen van x. Een punt $x \in X$ heet verdichtingspunt van $\mathcal{F}$, indien $x \in \overline{F}$ voor elke $F \in \mathcal{F}$.

Elke filterbasis $\mathcal{B}$ brengt een filter $\mathcal{F}$ voort, nl.
$\mathcal{F} = \{F \subset X : \exists B \subset F,\ B \in \mathcal{B}\}$. $\mathcal{B}$ heet dan ook een basis van $\mathcal{F}$.

Stelling

1. Bij elk filter bestaat er een fijner ultrafilter.
2. Een filter $\mathcal{F}$ is een ultrafilter precies dan als

$$A \subset X,\ A \notin \mathcal{F} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{F}.$$

1.8. Als $\mathcal{B}$ een filterbasis is op X en $f: X \to Y$, dan is $f(\mathcal{B}) = \{f(B): B \in \mathcal{B}\}$ een filterbasis op Y. Als Y topologisch is en $f(\mathcal{B})$ convergeert naar $y \in Y$, dan zeggen we dat y limiet is van f volgens $\mathcal{B}$ en noteren dit als $\lim_{\mathcal{B}} f = y$ of $\lim_{x,\mathcal{B}} f(x) = y$. Analoog voor een filter $\mathcal{F}$.

Zij nu $\mathcal{F}$ een filter op de verzameling $\mathcal{M}(X)$ der Radonmaten op een locaal compacte ruimte X. Voor $f \in \mathcal{C}_c(X)$ is $\psi_f: \mu \mapsto \mu(f)$ een lineaire vorm op $\mathcal{M}(X)$. We zeggen dat $\mathcal{F}$ vaag convergeert naar $\mu \in \mathcal{M}(X)$, indien $\lim_{\nu,\mathcal{F}} \psi_f(\nu) = \lim_{\nu,\mathcal{F}} \nu(f) = \mu(f)$ in $\mathbb{R}$, voor elke $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Dit vage convergentiebegrip correspondeert met de z.g. vage topologie op $\mathcal{M}(X)$.

Stelling (Alaoglu)

De gesloten eenheidsbol in de (genormeerde) ruimte $\mathcal{M}_b(X)$ der begrensde Radonmaten is vaag compact.

1.9. Een preordening op een verzameling X is een relatie $x \leqslant y$ in X, met

$$x \leqslant x \quad \text{en} \quad x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z.$$

Een preordening op X heet naar rechts filtrerend indien

$$\forall x,y\ \exists z \geqslant x,y.$$

De sectie S(a) van X t.a.v. a is de verzameling der $x \geqslant a$. Ga zelf na dat, voor $X \neq \emptyset$ en naar rechts filtrerend, de secties van X een filterbasis vormen. Het hierdoor voortgebrachte filter heet het sectiefilter van X. Convergentie van een familie $(f_a)_{a \in X}$ is steeds convergentie van $a \mapsto f_a$ volgens het sectiefilter van X. Evenzo voor verdichtingspunten.

We introduceren nu een tweede onjuiste, maar handige, notatie. Voorzie de verzameling $\mathcal{F}$ van (1.4) van de daar ingevoerde ordening.

De notatie $(f_n)\uparrow \subset \mathcal{F}$ betekent dat (f_n) een (aftelbare) stijgende rij functies in $\mathcal{F}$ is. De notatie $(f_\alpha)\uparrow \subset \mathcal{F}$ betekent dat (f_α) een naar rechts filtrerende familie functies in $\mathcal{F}$ is(met willekeurige indexverz.).

K1.10. Voor $X = \mathbb{R}^3$ is $\|x\|$ de Euclidische norm van x. Voor $U \in \mathcal{U}$ is $\mathcal{C}^{(k)}(U)$ de verzameling der kx continu differentieerbare functies op U. Voor de Lebesguemaat wordt het symbool ds gebruikt. De open bol met middelpunt y en straal ρ wordt aangegeven als $B(y,\rho)$.
Voor $0 \neq r = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ en $\rho = \|r\|$ bestaan er $\theta \in [0,\pi]$ en $\phi \in [0,2\pi)$ met $r = (\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho\cos\theta)$(bolcoördinaten). Voor $B = B(y,\rho)$ wordt de oppervlakte-integraal op ∂B gegeven door

$$\int_{\partial B} f d\sigma = \rho^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} f(y+r) \sin\theta d\theta$$

dus ook $\int_{\partial B} d\sigma = 4\pi\rho^2$. Merk op dat $\int_B f ds = \int_0^{\rho} d\rho' \int_{\partial B(y,\rho')} f d\sigma$
(zie bijv. [38], § 1.3.).

K1.11. We zullen de identiteit van Green gebruiken in de volgende eenvoudige vorm:
Stel $U \in \mathcal{U}$, B een open bol met $\bar{B} \subset U$ en $u,v \in C^{(2)}(U)$. We noteren $\Delta u = \sum_1^3 u_{x_i x_i}$ en $D_n u$ voor de afgeleide van u in de richting van de uitwendige normaal n van ∂B, d.w.z. $D_n u = \sum_1^3 u_{x_i} n_i$, $n = (n_1,n_2,n_3)$.

Stelling

$$\int_B (u\Delta v - v\Delta u) ds = \int_{\partial B} (uD_n v - vD_n u) d\sigma.$$

Voor een bol met de oorsprong als middelpunt geldt $D_n u = \frac{\partial u}{\partial \rho}$.
Geef zelf een interpretatie van deze formule voor het geval $X = \mathbb{R}$.

K1.12. Een analogon van de volgende uitspraak wordt bewezen in analyse III:
Stelling
Zij $U \in \mathcal{U}$, $K \in \mathcal{K}$ en $u: U \times K \to \mathbb{R}$, met $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{C}(U \times K)$ voor elke i. Dan $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_K u(x,y) d\mu(y) = \int_K \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) d\mu(y)$, voor elke $\mu \in \mathcal{M}(K)$.

§ 2. Harmonische schoven

K2.1. De kiem van de potentiaal theorie is te vinden in de aantrekkingswet van Newton : twee deeltjes met massa's m_1 en m_2 op een afstand ρ trekken elkaar aan volgens een kracht $|K| = m_1 m_2/\rho^2$. In de loop van de 18e eeuw wordt deze wet gebruikt voor de oplossing van specifieke fysisch-astronomische problemen, zoals de aantrekkingskracht van een ellepsoïde op een massapunt.

De autonome ontwikkeling van de potentiaaltheorie start in 1779 met de opmerking van Lagrange [28] dat de door de wet van Newton beschreven gravitatiekrachten zeer algemeen voorgesteld kunnen worden door de gradiënt van een functie, de z.g. potentiaal. In 1782 toont Laplace [30] aan dat deze potentiaal (in bolcoördinaten) voldoet aan de sindsdien naar hem genoemde differentiaalvergelijking

$$\text{(LV')}\quad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

ofwel in Cartesische coördinaten

$$\text{(LV)}\quad \Delta_3 u = \sum_1^3 u_{x_i x_i} = 0.$$

Soortgelijke resultaten waren voor de vloeistof mechanica gedeeltelijk al in 1752 door Euler verkregen en in 1738 door D. Bernoulli.

In 1813 toont Poisson [40] aan dat (LV) alleen juist is in een massavrij deel van de ruimte. Voor een ruimte met dichtheidsverdeling μ' geldt de naar hem genoemde vergelijking

$$\text{(PV)}\quad \Delta_3 u = -4\pi\mu'.$$

In deze paragraaf vertalen we een aantal resultaten uit de theorie van (LV) in abstracte definities.

2.2. Evident is dat de oplossingen van (LV) voldoen aan de volgende *Definitie* .

1. Een *harmonische schoof* op een topologische ruimte X is een reële *lineaire schoof* $\mathcal{H}: U \to \mathcal{H}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, van continue reële functies d.w.z.

   a. Voor elke $U \in \mathcal{U}$ is $\mathcal{H}(U)$ een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ van continue functies $h : U \to \mathbb{R}$.

   b. $U, V \in \mathcal{U}, V \subset U, h \in \mathcal{H}(U) \Rightarrow h \in \mathcal{H}(V)$ (1.4)

   c. $(U_i) \subset \mathcal{U}, U = \cup U_i, h : U \to \mathbb{R}, h \in \bigcap_i \mathcal{H}(U_i) \Rightarrow h \in \mathcal{H}(U)$.

2. Een functie $h \in \mathcal{H}(U)$ heet *harmonisch* op U of een *$\mathcal{H}$-functie* op U.

3. $\mathcal{H}$ heet *niet ontaard* in $x \in X$ als er een $U \in \mathcal{U}(x)$ en $h \in \mathcal{H}(U)$ bestaan, met $h(x) \neq 0$.

4. $U \in \mathcal{U}$ heet een *P-verzameling* indien er een $m > 0$ en een $h \in \mathcal{H}(U)$ bestaan, met $h \geq m$ op U.

H (open verz.) = {continue functies}

Opgave.

Zij $\mathcal{H}$ een harmonische shoof op X, $Y \in \mathcal{U}$ en A de verzameling der $x \in X$ waarin $\mathcal{H}$ ontaard is.

5. Stel $\mathcal{H}_Y(U) = \mathcal{H}(U)$ voor $Y \supset U \in \mathcal{U}$. $U \mapsto \mathcal{H}_Y(U)$ is een harmonische schoof op Y, genaamd de *restrictie* van $\mathcal{H}$ tot Y.

6. A is gesloten.

7. De harmonische schoof $\mathcal{H}_{\complement A}$ is nergens ontaard.

Voortaan is $\mathcal{L}$ de door (LV) voortgebrachte harmonische schoof op $\mathbb{R}^3$. Uit $\Delta_3\, 1 = 0$ volgt dat $\mathbb{R}^3$ een P-verzameling is.

K2.3. In 1823 bewijst Poisson [41] door middel van een formule dat oplossingen van (LV) binnen een bol alleen afhankelijk

zijn van de randwaarden. We leiden deze formule af, met behulp van een door Green [20] in 1828 (publicatie rond 1850) ontwikkelde, ook voor meer algemene gevallen bruikbare, methode. Zij $B = B(y,\rho)$, $B_1 = B(x,a)$ met $\overline{B}_1 \subset B$, $\Delta_3 u = 0$ in B en $u, v \in \mathcal{C}^{(2)}$ in een omgeving van B. Volgens (K1.11) geldt

$$_{\partial B}\int (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma = {}_{B}\int u\Delta v ds = {}_{B_1}\int u\Delta v ds + {}_{B\setminus B_1}\int u\Delta v ds$$

ofwel

$$(1) \quad _{\partial B_1}\int (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma = {}_{\partial B}\int (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma - {}_{B\setminus B_1}\int u\Delta v ds$$

Deze formule hangt niet af van de waarden van v in B_1. Veronderstel nu de existentie van een functie G_x met de eigenschappen

α. $G_x(z) = 1/\|x-z\| - h_x(z)$ voor $x \neq z$

β. h_x is $\mathcal{L}$-harmonisch in een omgeving van $\overline{B}$.

γ. $G_x = 0$ op ∂B.

Buiten B_1 valt G_x kennelijk samen met een $\mathcal{C}^{(2)}$ functie, gedefinieërd in een omgeving van B, dus (1) is toepasbaar met G_x i.p.v. v. Bij de limiet overgang $a \to 0$ gaat het linkerlid van (1) over in $-4\pi\, u(x)$, terwijl $z \mapsto 1/\|z-x\| \in \mathcal{L}(\complement\{x\})$, ofwel :

$$(2) \quad -4\pi\, u(x) = {}_{\partial B}\int u \frac{\partial G_x}{\partial n} d\sigma$$

De -nog te construeren- functie $(x,z) \mapsto G_x(z)$ wordt voortaan genoteerd als $(x,z) \mapsto G(x,z)$. Sinds Riemann heet zij de Green functie van B. De functie $z \mapsto G_x(z)$ wordt wel de Green functie van B met pool x genoemd.

K2.4. Gezocht wordt dus een functie h_x, $\mathcal{L}$-harmonisch in een omgeving van $\overline{B}$ en op ∂B samenvallend met de functie $z \mapsto 1/\|x-z\|$. Een voor de hand liggend probeersel is $h_x(z) = \mu/\|x^*-z\|$ voor een $x^* \in \complement\overline{B}$. Om redenen van symmetrie zal dan tevens moeten

gelden $x^* = y + \lambda(x-y)$. Inderdaad blijkt voor $x \neq y$ de vergelijking $z \in \partial B \to \mu/\|y+\lambda(x-y)-z\| = 1/\|x-y\|$ oplosbaar te zijn (gebruik op een handige manier bolcoördinaten). De extra eis $x^* \notin \overline{B}$ geeft als unieke oplossing $\lambda = \rho^2/\|x-y\|^2$, $\mu = \lambda^{\frac{1}{2}}$ (inversie t.o.v. B), ofwel

$$G(x,z) = \frac{1}{\|z-x\|} - \frac{\rho\|x-y\|}{\|\|y-x\|^2(z-y)-\rho^2(x-y)\|},\ x \neq y,\ z \neq x, \text{ terwijl}$$

(3)

$$G(y,z) = \frac{1}{\|z-y\|} - \frac{1}{\rho}$$

kennelijk voldoet voor $x = y$. Berekening van $\frac{\partial G_x}{\partial n}$ levert tenslotte het gewenste resultaat:

K2.5. Definitie.

Voor $B = B(y,\rho)$ is de Poisson-kern van B de op $B \times (\overline{B}\setminus\{x\})$ gedefinieerde functie $K_\rho^y : (x,z) \mapsto \rho \frac{\rho^2-\|y-x\|^2}{\|z-x\|^3}$.

Lemma (formule van Poisson)

Voor h $\mathcal{L}$-harmonisch in een omgeving van B en $x \in B$ geldt

$$h(x) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B} K_\rho^y(x,z)\, f(z)d\sigma(z)$$

K2.6. Opgave

Zij $U \in \mathcal{U}$ en $u \in \mathcal{C}^{(2)}(U)$. Bewijs :

1. $\Delta_3 u = 0$ in $U \Leftrightarrow \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0$ voor elke bol $\overline{B} \subset U$ (Gauss).

2. $\Delta_3 u = 0$ in $U \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B} u(z)d\sigma(z) = u(x) \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi\rho^3} \int_B u(z)ds(z) = u(x$ voor elke bol $\overline{B} \subset U$, met straal ρ. (gebruik differentiatie achter het integraal teken).

3. $\Delta_3 u = 0$ in U, u extremaal in $x \in U \Rightarrow$ u is constant in een omgeving van x.

* Opmerkingen

4. Bij het formuleren van de axiomatische theorie zal de Green functie verder geen rol meer spelen. De existentie van een dergelijke functie in een abstracte harmonische ruimte kan echter wel aangetoond worden. Zie bijv. [17], chap. 11.

5. $\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ heet de uittredende flux. Zie [52] en [53] voor de rol van dit begrip in de cohomologie theorie van de Brelot-axiomatiek.

6. De equivalenties in (K2.6.2.) kunnen ook worden bewezen voor $u \in \mathcal{C}(U)$. Deze middelwaarde eigenschappen worden dan ook soms gebruikt voor de definitie der $\mathcal{L}$-harmonische functies, bijv. in [14]. Zie [24] voor een poging tot axiomatisering van deze eigenschap.

K2.7. Voor elke σ-integreerbare functie f op ∂B is

$\omega^B f: x \mapsto \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B} K_\rho^y(x,z)f(z)d\sigma(z)$ een op B gedefinieerde reëel waardige functie. In het bijzonder is dus, voor elke $x \in B$, $f \mapsto (\omega^B f)(x)$, $f \in \mathcal{C}_c(\partial B)$, een Radonmaat ω_x^B op ∂B. Daar K_ρ^y als functie van x $\mathcal{L}$-harmonisch is volgt nu uit (K1.12):

Lemma

Voor $B = B(y,\rho)$ en $f \in \mathcal{C}(\partial B)$ is $\omega^B f$ $\mathcal{L}$-harmonisch op B.

De existentie- en eenduidigheidsresultaten (K2.5) en (K2.7) vatten we samen in

2.8. Definitie

Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{H}$ een harmonische schoof op X.

1. Voor elke $U \in \mathfrak{U}$, elke numerieke functie f op ∂U en elke afbeelding $\omega^U: x \mapsto \omega_x^U$ van U in $\mathcal{M}_+(\partial U)$ schrijven we $\omega^U f$ voor de functie $x \mapsto \int^* f d\omega_x^U$, $x \in U$.
2. Een $\mathcal{H}$-kern op $U \in \mathfrak{U}_c$ is een afbeelding $\omega^U: x \mapsto \omega_x^U$ van U in

$\mathcal{M}_+(\partial U)$, met

a. $f \in \mathcal{C}(\partial U) \Rightarrow \omega^U f \in \mathcal{H}(U)$

b. $\bar{U} \subset V \in \mathcal{U}$, $h \in \mathcal{H}(V) \Rightarrow \omega^U h = h$ in U.

3. Een <u>veegsysteem</u> op X is een paar $(\mathcal{B},\omega)$, met $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_c$ een basis van $\mathcal{U}$ en ω een afbeelding ω: $U \mapsto \omega^U: x \mapsto \omega^U_x$, $U \in \mathcal{B}$, $x \in U$, $\omega^U_x \in \mathcal{M}_+(\partial U)$.

4. Een veegsysteem $(\mathcal{B},\omega)$ op X heet een <u>$\mathcal{H}$-veegsysteem</u> indien ω^U een $\mathcal{H}$-kern is voor elke $U \in \mathcal{B}$.

Merk op dat uit de existentie van een veegsysteem volgt dat X locaal compact is.

* $\mathcal{H}$-kernen zijn hier kernen van U in ∂U. In <u>Hansen</u> [47] zijn $\mathcal{H}$-kernen kernen van U in $\complement U$ en vormen zij het uitgangspunt voor een iets algemenere axiomatiek, die bijv. ook de discrete potentiaaltheorie omvat.

K2.9. Het in (K2.5) en (K2.7) gedefinieerde $\mathcal{H}$-veegsysteem, met $\mathcal{B}$ de verzameling der bollen en ω^B_x de maat $\frac{1}{4\pi\rho^2} K^y_\rho(x,\cdot)\cdot\sigma$ heet voortaan het <u>Poisson-veegsysteem</u>. Dit veegsysteem heeft de extra eigenschappen dat elke $B \in \mathcal{B}$ samenhangend is en dat ∂B de drager is van elke maat ω^B_x. Uit de context zal steeds blijken of de term Poisson-kern gebruikt wordt in de zin van (K2.5) of van (2.8.2).

2.10. <u>Opgaven</u>

1. Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof en $(\mathcal{B},\omega)$ een $\mathcal{H}$-veegsysteem op X. Bewijs:

   $U \in \mathcal{U}$, $(h_\alpha)\uparrow \subset \mathcal{H}(U)$, $h = \sup h_\alpha \in \mathcal{C}(U) \Rightarrow h \in \mathcal{H}(U)$.

2. Zij $(\mathcal{B},\omega)$ een veegsysteem op X, met $\omega^V(\omega^W f) = \omega^W f$ in V voor alle $V,W \in \mathcal{B}$ en $f \in \mathcal{C}(\partial W)$ met $\bar{V} \subset W$. Bewijs dat

   $\mathcal{H}(U) = \{h \in \mathcal{C}(U)$: $\forall x \in U\ \exists O \in \mathcal{U}(x)\quad x \in V \in \mathcal{B},\ \bar{V} \subset O \cap U \Rightarrow$

$\omega^V h = h$ in $V\}$ een harmonische schoof op X definieert, en wel de kleinste met de eigenschap

$$V \in \mathcal{B}, \quad f \in \mathcal{C}(\partial V) \Rightarrow \omega^V f \in \mathcal{H}(V).$$

3. Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof op K en $U \in \mathcal{U}_c$ met $\partial U = \emptyset$. Er bestaat een $\mathcal{H}$-kern op U precies dan als $\mathcal{H}(U) = \{0\}$.
4. Zij U een P-verzameling, $\overline{V} \subset U$ en ω^V een $\mathcal{H}$-kern op V.
   a. $\omega^V 1 \geqslant m$ op V voor een $m > 0$.
   b. $(V) \subsetneqq \mathcal{C}(V)$ als $V \neq \emptyset$.
5. Zij ω^U een $\mathcal{H}$-kern op $U \in \mathcal{U}_c$ en laat $\mathcal{H}$ de Bauer convergentie (2.12) eigenschap bezitten. Als $f: \partial U \to (-\infty,\infty]$ naar beneden begrensd is, is $\omega^U f$ s.c.i.

K2.11. Ook een tweede fundamentele eigenschap voor de $\mathcal{L}$-schoof volgt rechtstreeks uit de lemma's (K2.5) en (K2.7). Een eenvoudige afschatting in (K2.5) levert:

Lemma (ongelijkheid van Harnack)

Zij $B = B(y,\rho)$, $h \geqslant 0$ $\mathcal{L}$-harmonisch in een omgeving van $\overline{B}$ en $\delta \in (0,1)$. Voor $\|x-y\| \leqslant \delta\rho$ geldt $|h(x)-h(y)| \leqslant \frac{3\delta}{(1-\delta)^2} h(y)$.

2.12. Definitie

Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof op X. $\mathcal{H}$ bezit de Bauer convergentie eigenschap K_1, indien

$$U \in \mathcal{U}, \quad (h_\alpha) \subset \mathcal{H}(U), \quad h_\alpha \uparrow h, \quad h \text{ locaal begrensd} \Rightarrow h \in \mathcal{H}(U).$$

* Voor X locaal compact is het reeds voldoende deze eigenschap te eisen voor stijgende rijen. Zie bijv. [17], p. 10.

K2.13. Lemma

De schoof $\mathcal{L}$ voldoet aan K_1.

We bewijzen de uitspraak $h \in \mathcal{H}(U)$ zelfs onder de zwakkere veronderstelling dat h eindig is op een dicht deel van U. Het is daar-

bij geen beperking $(h_\alpha) \subset \mathcal{L}_+(U)$ te veronderstellen. Voor elke $x \in U$ bestaat er een $y \in D$ en een bol $B = B(y,\rho)$ met $\overline{B} \subset U$ en $\|y-x\| \leq \frac{1}{2}\rho$. Uit (K2.5) en (K2.11) volgt $h(x) = \lim h_\alpha(x) \leq \lim\sup 7h_\alpha(y) = 7h(y) < \infty$, d.w.z. h is overal eindig en (h_α) is equicontinu (K2.11). Hieruit volgt $h_\alpha \to h$ locaal uniform, $h \in \mathcal{C}(U)$ en dus $h \in \mathcal{H}(U)$ (2.10.1). □

Volgens de stelling van Harnack 1887 [21] voldoet $\mathcal{L}$ in feite aan een nog sterkere convergentie eigenschap, zie

2.14. Stelling

Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof en $(\mathcal{B},\omega)$ een $\mathcal{H}$-veegsysteem op X. Equivalent zijn:

1. $\mathcal{H}$ voldoet aan K_1.
2. $V \in \mathcal{B}$, $f: \partial V \to \mathbb{R}$ begrensd $\Rightarrow$ $\omega^V f \in \mathcal{H}(V)$.
3. $V \in \mathcal{B}$, $f: \partial V \to \mathbb{R}$ begrensd en ω_x^V-integreerbaar voor elke $x \in V$ $\Rightarrow$ $\omega^V f \in \mathcal{H}(V)$.

1 ⇒ 2: Zij eerst f s.c.i. Voor $x \in V$ geldt
$(\omega^V f)(x) = \sup\{(\omega^V g)(x): g \leq f, g \in \mathcal{C}(\partial V)\} = \sup(\omega^V g)(x)$, met $(\omega^V g)\uparrow \subset \mathcal{H}(V)$ begrensd.
Voor f willekeurig geldt $(\omega^V f)(x) = \inf\{(\omega^V g)(x): g \geq f$, g s.c.i. begrensd$\} = (\inf \omega^V g)(x)$, met $(\omega^V g)\downarrow \subset \mathcal{H}(V)$ begrensd.

2 ⇒ 3: Evident.

3 ⇒ 1: Stel $U \in \mathcal{U}$, $(h_\alpha)\uparrow \subset \mathcal{H}(U)$ locaal begrensd en $h = \sup h_\alpha$. Kies $V \in \mathcal{B}$, met $\overline{V} \subset U$ en h begrensd op $\overline{V}$. Voldoende is het bewijs van $h \in \mathcal{H}(V)$. De functie h is s.c.i. op ∂V dus ω_x^V-integreerbaar voor $x \in V$, d.w.z. $\omega^V h \in \mathcal{H}(V)$. Tenslotte geldt $\omega^V h = \omega^V(\sup h_\alpha) = \sup(\omega^V h_\alpha) = \sup h_\alpha = h$ op V. □

2.15. Een verrassend gevolg van K_1 is:

Theorema (Boboc c.s. [4])
Als $\mathcal{H}$ een nergens ontaarde harmonische schoof op X is die aan K_1 voldoet, dan is X locaal samenhangend.

Zij $x \in X$ en $U \in \mathcal{U}(x)$. Bewezen moet worden dat x een samenhangende omgeving in U bezit. Aangenomen mag worden dat er $m > 0$ en $h \in \mathcal{H}(U)$ bestaan, met $h \geqslant m$. De familie $\mathcal{B}$ der $V \in \mathcal{U}$ met $x \in V = \overline{V} \cap U$ is niet leeg en naar rechts filtrerend t.a.v. de orde-relatie $V \leqslant V'$ indien $V' \subset V$. Met de notaties $h_V = 1_{U-V}h$, $\hat{h} = \sup\{h_V: V \in \mathcal{B}\}$ en $W = \cap \{V: V \in \mathcal{B}\}$ geldt $(h_V)\uparrow \subset \mathcal{H}(U)$ en $h_V \leqslant h$, dus ook $h \geqslant \hat{h} \in \mathcal{H}(U)$. Uit $\hat{h} \in \mathcal{C}(U)$ volgt $W = \hat{h}^{-1}(0) = \{y \in U: \hat{h}(y) < \frac{1}{2}m\}$, dus $x \in W = \overline{W} \cap U$, W is het kleinste element van $\mathcal{B}$ en W is samenhangend (ga na). □

2.16. Opgaven

Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof op X en $f \in \mathcal{C}(X)$ strict positief.

1. $\mathcal{H}_f$: $U \mapsto \{h/f: h \in \mathcal{H}(U)\}$ is een harmonische schoof op X.
2. $\mathcal{H}_f$ is niet ontaard in x als $\mathcal{H}$ niet ontaard is in x.
3. Als $\mathcal{H}$ voldoet aan K_1, dan ook $\mathcal{H}_f$.
4. $f \in \mathcal{H}(U) \Rightarrow 1 \in \mathcal{H}_f(U)$.
5. Als ω^U een $\mathcal{H}$-kern is op U, dan is $x \mapsto \frac{f}{f(x)} \cdot \omega^U_x$ een $\mathcal{H}_f$-kern op U.

2.17. De tot nu toe behandelde begrippen harmonische schoof, $\mathcal{H}$-veegsysteem en convergentie eigenschap zijn nog niet voldoende voor een bevredigende potentiaaltheorie. Door het opleggen van enige extra eisen aan het $\mathcal{H}$-veegsysteem en van een sterkere convergentie eigenschap wordt wel een rijke theorie verkregen. Dit gaat echter ten koste van de algemene toepasbaarheid. Binnen deze theorie is het gebruikelijk de schoof der harmonische functies in te bedden in de schoof der z.g. hyperharmonische functies. Een

voldoend rijke en algemeen toepasbare theorie wordt nu verkregen door een aantal eigenschappen van deze hyperharmonische schoof als axioma te postuleren.

§3. Hyperharmonische schoven.

K3.1 De vergelijking van Laplace geldt slechts in ladingsvrije ruimten. In een niet ladingsvrijdeel van de ruimte geldt de vergelijking van Poisson (PV) : $\Delta_3 u = -4\pi\mu'$,waarbij de ladingsverdeling μ' i.h.a. onbekend is. Voldoende voor de oplosbaarheid van (PV) is de oplosbaarheid van $\Delta_3 u = -4\pi\mu'_+$ en $\Delta_3 u = -4\pi\mu'_-$. Zij nu $U \in \mathcal{U}$ en $u \in \mathcal{C}^{(2)}(U)$, met $\Delta_3 u \leq 0$ in U. De in (K2.3) gegeven afleiding geeft nu voor elke bol $\overline{B} \subset U$:

$-4\pi u(x) = \int_{\partial B} u \frac{\partial G_x}{\partial n} d\sigma + \int_B \Delta_3 u G_x \, ds$, dus ook $u(x) \geq (\omega^B u)(x)$ voor elke $x \in B$.

Deze ongelijkheid staat aan de basis van de theorie der superharmonische functies, geentameerd in 1926 door Riesz [44], en leent zich tot axiomatisering.

* K3.2 Bovengenoemde ongelijkheid is ook zinvol voor minder gladde u. Omgekeerd is het rechterlid μ' in (PV) niet noodzakelijk een overal gedefinieerde functie (puntladingen, dipolen!).

Een meer algemeen geldig mathematisch model wordt daarom geleverd door de distributievergelijking $(\Delta_3 T)(\phi) = -4\pi\mu(\phi)$, $\phi \in D$, met D de verzameling der $\mathcal{C}^{(\infty)}$ functies met compacte drager, μ een Radonmaat, T een locaal integreerbare distributie en $(\Delta_3 T)(\phi)$ gedefinieerd als $T(\Delta_3 \phi)$. Volgens een moderne formulering (zie b.v. [14]) van de resultaten van Riesz zijn de locaal integreerbare distributies T, met $\Delta T \leq 0$, b.o. gelijk aan de b.o. eindige $\mathcal{L}$-hyperharmonische functies (zie beneden). Dit verklaart de volgende

3.3 Definitie.

Zij $(\mathcal{B},\omega)$ een veegsysteem op X. Een s.c.i. functie $u : U \to (-\infty,\infty]$, $U \in \mathcal{U}$, heet locaal ω-hyperharmonisch in U, notatie $u \in \mathcal{U}(U)$, indien er voor elke $x \in U$ een $0 \in \mathcal{U}(x)$ bestaat, met

$V \subset \bar{V} \subset O \cap U,\ V \in \mathcal{B} \Rightarrow \omega^V u \leq u$ in V.

De afbeelding $U \to \mathcal{U}(U)$ is een schoof, de door ω <u>voortgebrachte hyperharmonische schoof</u>. Voor het Poisson veegsysteem ω (K2.9) noemen we de locaal ω-hyperharmonische functies ook wel <u>$\mathcal{L}$-hyperharmonisch</u>. Deze schoof wordt aangegeven met $\mathcal{L}^*$. Voor vaste U is $\mathcal{U}(U)$ een convexe inf-stabiele kegel (d.w.z. $u,v \in \mathcal{U}(U) \Rightarrow \inf(u,v) \in \mathcal{U}(U)$). We hebben hier dus een speciaal geval van de volgende

3.4 <u>Definitie</u>.

Een schoof $\mathcal{U}$ op een topologische ruimte X heet een <u>hyperharmonische schoof</u> indien elke $\mathcal{U}(U)$ een convexe kegel van s.c.i. functies $u : U \to (-\infty,\infty]$ is.

Voor elke hyperharmonische schoof $\mathcal{U}$ is $-\mathcal{U}$ een <u>hypoharmonische schoof</u>. Voor elke hyperharmonische schoof $\mathcal{U}$ is $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} : U \to \mathcal{U}(U) \cap (-\mathcal{U}(U))$ kennelijk een harmonische schoof. Uit het volgende resultaat en (K2.9) blijkt dat de $\mathcal{L}$-hyperharmonische functies op deze wijze weer de $\mathcal{L}$-harmonische functies geven:

<u>Lemma</u>.

Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof en $(\mathcal{B},\omega)$ een $\mathcal{H}$-veegsysteem. Voor de door ω voortgebrachte hyperharmonische schoof $\mathcal{U}$ geldt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$.

Zij $U \in \mathcal{U}$ en $h \in \mathcal{H}(U)$. Voor elke $V \in \mathcal{B}$ met $\bar{V} \subset U$ geldt $\omega^V h = h$, d.w.z. $\pm h \in \mathcal{U}(U)$. Zij omgekeerd $h \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}(U)$ en $x \in U$. Er bestaat een $V \in \mathcal{B}$, met $x \subset V \subset \bar{V} \subset U$ en $h = \omega^V h$. Uit $h \in \mathcal{C}(\partial V)$ en (2.8.2) volgt $h \in \mathcal{H}(V)$. Pas nu (2.2.1) toe. □

3.5 <u>Opgave</u>.

Zij $(\mathcal{B},\omega)$ een veegsysteem op X. Een s.c.i. functie $u : U \to (-\infty,\infty]$, $U \in \mathcal{U}$, heet <u>ω-hyperharmonisch</u> op U, indien $\omega^V u \geq u$ voor elke $V \in \mathcal{B}$, $\bar{V} \subset U$. Bewijs dat de door ω voortgebrachte hyperharmonische schoof

de kleinste hyperharmonische schoof is, die alle ω-hyperharmonische functies bevat.

K3.6 Uit (K3.1) volgt een zeer algemeen minimumprincipe voor de $\mathcal{L}$-hyperharmonische functies:

Lemma.

Uit $U \in \mathcal{U}$, $u \in \mathcal{L}^*(U)$, $K \in \mathcal{K}$, $u \geq 0$ op $U \setminus K$ en $\hat{u} \geq 0$ op ∂U (1.5) volgt $u \geq 0$.

Het is voldoende dit te bewijzen voor U samenhangend. De s.c.i. functie $\hat{u}$ neemt haar minimum $-m$, $m > 0$, aan in $x \in K \cap U$ indien $u \not\geq 0$. Voor $u' = u+m$ geldt $u' \in \mathcal{L}^*_+(U)$ en $A = \{u' > 0\}$ is open en niet-leeg. Voor $z \in \bar{A} \cap U$ bestaat er een bol B met $z \in B \subset \bar{B} \subset U$ en $u'(z) \geq (\omega^B u')(z) \geq (\omega^B(1_{A \cap \partial B} u'))(z) > 0$. U is echter samenhangend. □

Klassiek voldoet dus elke $U \in \mathcal{U}$ aan:

3.7 Definitie.

Zij $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof op X. $U \in \mathcal{U}$ heet een MP-verzameling t.a.v. $\mathcal{U}$ indien

$$u \in \mathcal{U}(U),\ K \in \mathcal{K},\ u \geq 0 \text{ op } U \setminus K,\ \hat{u}(x) \geq 0 \text{ voor elke } x \in \partial U \Rightarrow u \geq 0.$$

Bewijs zelf de volgende, in het klassieke geval meer gebruikelijke, formulering van het minimum principe voor onbegrensde verzamelingen (Brelot [7]).

Opgave.

Zij X locaal compact, $1 \in \mathcal{U}(X)$ en zij $\bar{\partial}U$ de rand van U in de Alexandroff compactificatie van X. U is een MP-verzameling precies dan als

$$u \in \mathcal{U}(U),\ \hat{u} \geq 0 \text{ op } \bar{\partial}U \Rightarrow u \geq 0.$$

3.8 Opgave.

In de notaties van (2.16) geldt:

1. Als $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof is op X, dan ook $\mathcal{U}_f : U \to \{u/f : u \in \mathcal{U}(U)\}$.
2. $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}_f$ hebben dezelfde MP-verzamelingen.
3. Als $\mathcal{U}$ wordt voortgebracht door een veegsysteem $(\mathcal{B},\omega)$, dan wordt $\mathcal{U}_f$ voortgebracht door het veegsysteem $(\mathcal{B},{}^f\omega)$, met ${}^f\omega_x^V = \frac{f}{f(x)}\omega_x^V$, $x \in V \in \mathcal{B}$.

3.9 <u>Opgave</u>.

1. De eis $\omega^V u \leq u$ in (3.3) is equivalent met $\omega^V g \leq u$ voor alle $g \in \mathcal{C}(\partial V)$ met $g \leq u$.
2. Uit (K3.6) volgt dat voor het Poisson-veegsysteem ω de begrippen ω-hyperharmonisch (3.5) en locaal ω-hyperharmonisch samenvallen.

§ 4. Harmonische ruimten

K4.1. Zij U een geaard metalen vat en μ' een ladingsverdeling in U. De electrostatische potentiaal u moet voldoen aan (PV), met de randconditie $u = 0$ op ∂U. Laat v een functie zijn met $\Delta v = -4\pi\mu'$ in een omgeving van U. De onbekende functie u moet voldoen aan $u = v+h$, met $\Delta h = 0$ in U en $h = -v$ op ∂U. Op de constructie van de functie v gaan we hier niet in. Zie echter (K7.1). De vraag naar de existentie van een in U $\mathcal{L}$-harmonische functie h, met gegeven continue randwaarden, draagt sinds Riemann de naam <u>probleem van Dirichlet</u> en is één van de drie door Gauss [19] behandelde hoofdproblemen van de potentiaaltheorie. Meer algemeen:

4.2. <u>Definitie</u>

Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof op X, $U \in \mathcal{U}$ en $f \in \mathcal{C}_c(\partial U)$. Een functie $u \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$ heet een <u>klassieke oplossing</u> van het probleem van Dirichlet, met <u>randwaarde</u> f, indien $u = f$ op ∂U.

K4.3. Zij $U \in \mathcal{U}_c$, $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ en $h \in \mathcal{L}(U)$ een klassieke oplossing met randwaarde f.

<u>Lemma</u>

1. h is eenduidig bepaald door f.
2. $h \geq 0$ indien $f \geq 0$.

1: Laat ook h' een klassieke oplossing zijn. Merk op dat $\pm(h-h') \in \mathcal{L}^*(U)$ en pas (K3.6) toe.

2: Volgt eveneens uit $\mathcal{L}(U) \subset \mathcal{L}^*(U)$ en (K3.6). □

K4.4. De <u>eenduidigheid</u> der klassieke oplossingen is dus geen probleem. Eerst in 1911 toont <u>Zaremba</u> [55] aan dat de <u>existentie</u> niet steeds gewaarborgd is. Zij bijv. $U = B(0,1)-\{0\}$, $f = 1$ op ∂B en $f(0) = 0$. Uit de eenduidigheid en de rotatie-invariantie der vergelijkingen volgt dat elke klassieke oplossing h in bolcoördinaten alleen een

functie van ρ kan zijn. Hieruit volgt $\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = 0$ (K2.1) en $u = A/\rho + B$, in strijd met de gegeven randwaarden.

In 1924 trekt Lebesgue [31] hieruit de conclusie dat het probleem onderverdeeld moet worden in

a. De constructie van een "verstandige" operator $(U,f) \mapsto H_f^U \in \mathcal{H}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{C}_c(\partial U)$.

b. Het opsporen van de randpunten waarin H_f^U continu aansluit op f.

Van de operator $(U,f) \mapsto H_f^U$ zal men eisen dat hij lineair en monotoon in f is en samenvalt met de klassieke oplossing zo deze bestaat.

K4.5. Omstreeks 1923 ontwikkelen Perron [37] en Reimak [43], voor die $U \in \mathcal{U}_c$ waarvoor de klassieke oplossing steeds bestaat, een oplosmethode waarbij de oplossing H_f^U voor het probleem met continue randwaarde f verkregen wordt als het inf $\overline{H}_f^U$ van alle continue hyperharmonische functies die f op ∂U majoreren. Deze methode is een generalisatie van de methode van Peano voor de oplossing van beginwaarde problemen voor gewone 1e orde differentiaalvergelijkingen.

In 1925 merkt Wiener [54] op dat de methode niet expliciet gebruik maakt van de randeigenschappen van U, dat ook voor willekeurige U steeds geldt $\overline{H}_f^U = -\overline{H}_{-f}^U \in \mathcal{H}(U)$ en dat de gemeenschappelijke waarde H_f^U voldoet aan bovengenoemde eisen. (Zie ook Vasilesco [51].) In 1940 breidt Brelot [6] de methode tenslotte uit tot willekeurige randfuncties, gebruik makend van s.c.i. hyperharmonische functies.

* De $\mathcal{C}^{(2)}$-hyperharmonische functies werden overigens reeds in 1887 gebruikt voor de klassieke oplossing van het probleem van Dirichlet d.m.v. de balayage-methode van Poincaré [39]. We geven nu de abstracte definities:

4.6. Definitie

Zij $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof op X, $U \in \mathcal{U}$ een MP-verzameling en $f: \partial U \to [-\infty,\infty]$.

1. $\overline{\mathcal{U}}_f^U$ is de verzameling der <u>bovenfuncties</u> van f, f.w.z. $u \in \overline{\mathcal{U}}_f^U$ indien

a. u is naar beneden begrensd op U;

b. $u \geq 0$ in $U\setminus K$ voor zekere $K \in \mathcal{K}$;

c. $x \in \partial U \Rightarrow \hat{u}(x) \geq f(x)$.

2. $\underline{\mathcal{U}}_f^U = -\mathcal{U}_{-f}^U$ is de verzameling der <u>benedenfuncties</u> van f, $\overline{H}_f^U =$ $= \inf \overline{\mathcal{U}}_f^U$ is de <u>bovenoplossing</u> en $\underline{H}_f^U = \sup \mathcal{U}_f^U$ de <u>benedenoplossing</u> met randwaarde f.

3. f heet <u>resolutief</u> indien $\overline{H}_f^U = \underline{H}_f^U \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}(U)$. We schrijven dan H_f^U i.p.v. $\overline{H}_f^U$ en noemen dit de <u>gegeneraliseerde oplossing</u>, met randwaarde f, van het probleem van Dirichlet (in de zin van <u>Perron-Wiener-Brelot</u>).

4. U heet <u>resolutief</u> indien elke $f \in \mathcal{C}_c(\partial U)$ resolutief is.

4.7. Zij $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof en U een MP-verzameling.

1. $-\overline{H}_f^U = \underline{H}_{-f}^U, \quad \underline{H}_f^U \leq \overline{H}_f^U, \quad |\overline{H}_f| \leq \overline{H}_{|f|}$.

2. $f \leq g \Rightarrow \overline{H}_f^U \leq \overline{H}_g^U, \quad \underline{H}_f^U \leq \underline{H}_g^U$.

3. $\lambda \geq 0 \Rightarrow \overline{H}_{\lambda f}^U = \lambda \overline{H}_f^U, \quad \underline{H}_{\lambda f} = \lambda \underline{H}_f^U$.

4. $\overline{H}_{f+g}^U \leq \overline{H}_f^U + \overline{H}_g^U, \quad \underline{H}_{f+g}^U \geq \underline{H}_f^U + \underline{H}_g^U$. (1.4)

5. $f \mapsto H_f^U$ is een lineaire afbeelding van de lineaire ruimte der eindige resolutieve functies in $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}(U)$.

6. Voor V resolutief en $x \in V$ is $\mu_x^V\colon f \mapsto H_f^V(x)$ een positieve lineaire vorm op $\mathcal{C}_c(\partial V)$, de <u>harmonische maat</u> op V in x.

7. Voor $V \in \mathcal{U}_c$ resolutief is $x \mapsto \mu_x^V$ een $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$-kern op V.

8. Als $U \in \mathcal{U}_c$ en h is een klassieke oplossing met randwaarde $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, dan is f resolutief en $h = H_f^U$.

De bewijzen zijn triviaal. □

Zie bijv. de la Vallée Poussin [50] en Monna [36] voor de geboorte van het begrip harmonische maat.

Opgave

Voor $U \in \mathcal{U}$ met $\partial U = \emptyset$ geldt

9. U is resolutief $\Leftrightarrow$ U is M.P. Vergelijk opgave (3.7).

⟹ *Zie pagina 24a*

* De harmonische schoof ($\mathbb{R}^3,\mathcal{L}$) bezit dus zelf een basis van reguliere verzamelingen:

Definitie. Zij $\mathcal{H}$ een harmonische schoof op X en $U \in \mathcal{U}_c$. U heet regulier (t.a.v. $\mathcal{H}$) als er voor elke $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ precies één $h \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$ bestaat, positief indien f positief is.

De afbeelding $f \mapsto h(x)$ is voor $x \in U$ een positieve Radonmaat op ∂U. Hiervoor wordt de notatie ω_x^U gereserveerd. De afbeelding $x \mapsto \omega_x^U$ is kennelijk een $\mathcal{H}$-kern op U. In de oudere versies van de axiomatische potentiaaltheorie wordt steeds het bestaan van een basis van reguliere verzamelingen geëist. Ga zelf na dat elke MP-reguliere verzameling ook resolutief is en dat hiervoor geldt $\mu_x^U = \omega_x^U$.

4.9. Het begrip harmonische ruimte kan nu gedefinieerd worden. Ruw gezegd is dat een ruimte waarin harmonische en hyperharmonische functies locaal gedefinieerd zijn en waarin het Dirichlet probleem behandeld kan worden met de Perron-Wiener-Brelot methode.

Definitie

Een harmonische ruimte is een paar $(X,\mathcal{U})$, met $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof op de topologische ruimte X, waarbij voldaan wordt aan de axioma's:

H1. (Positiviteit) De harmonische schoof $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ is nergens gedegenereerd.

H2. (Convergentie) De harmonische schoof $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ voldoet aan K1.

H3. (Resolutiviteit) De voorwaardelijk compacte resolutieve verzamelingen vormen een basis $\mathcal{B}_r$ van $\mathcal{U}$.

H4. (Volledigheid) Voor $U \in \mathcal{U}$ en $u: U \to (-\infty,\infty]$ s.c.i. geldt

$$(V \in \mathcal{B}_r,\ \overline{V} \subset U \Rightarrow \mu^V u \leq u) \Rightarrow u \in \mathcal{U}(U).$$

K4.8. Voor de hyperharmonische schoof $\mathcal{L}^*$ vormt de verzameling $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_c$ der bollen een basis van resolutieve verzamelingen:

Lemma

Voor $B = B(y,\rho)$ en $f \in \mathcal{C}(\partial B)$ is f resolutief en $H_f^B = \omega^B f$.

B is MP volgens (K3.6). We bewijzen zelfs $\omega^B f \in \overline{\mathcal{U}}_f^B \cap \underline{\mathcal{U}}_f^B$ (4.7.1). Voldoende is het bewijs van $f \in \overline{\mathcal{U}}_f^B$, d.w.z. van $\liminf_{B \ni x \to z} (\omega^B f)(x) \geq f(z)$ voor $z \in \partial B$. Wegens $1 = \omega^B 1$ is het voldoende dat $\liminf_{B \ni x \to z} (\omega^B f_\varepsilon)(x) \geq 0$, voor elke $\varepsilon < f(z)$ en $f_\varepsilon = f - \varepsilon$. Kies $\delta > 0$ met $f > \varepsilon$ in $\partial B \cap B(z,\delta)$. Voor $x \in B(z,\frac{1}{2}\delta)$ geldt dan

$$(\omega^B f_\varepsilon)(x) = \omega^B(1_{\partial B \cap B(z,\delta)}\, f_\varepsilon))(x) + (\omega^B(1_{\partial B \setminus B(z,\delta)}\, f_\varepsilon))(x).$$

De eerste term is positief, de tweede convergeert naar 0 voor $x \to z$ (K2.5). □

In de notatie van (4.7.6) geldt dus zelfs $\mu_x^B = \omega_x^B$. Merk op dat in feite bewezen is dat $\omega^B f$ de (enige) klassieke oplossing met randwaarde f is.

Uit (3.4), (2.2), (K2.13), (K4.8) en (K3.6) volgt dat het onderzoekobject $(\mathbb{R}^3, \mathcal{L}^*)$ van de klassieke potentiaaltheorie inderdaad een harmonische ruimte is. We schrijven voortaan $\mathcal{H}$ i.p.v. $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$.

4.10. Uit (H3) en (2.15) volgt dat X locaal compact en locaal samenhangend is. Uit (H1), (2.10.3) en (4.7.7) volgt dat X geen geïsoleerde punten bezit.

Het $\mathcal{H}$-veegsysteem der voorwaardelijk compacte resolutieve verzamelingen en de hierop gedefinieerde harmonische maten wordt voortaan aangegeven met $(\mathcal{B}_r, \mu)$. $\mathcal{B}_r(U)$ is de verzameling der $V \in \mathcal{B}_r$, met $\overline{V} \subset U$. Als $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof is die voldoet aan (H3), dan is (H4) equivalent met de uitspraak dat $\mathcal{U}$ de door $(\mathcal{B}_r, \mu)$ voortgebrachte hyperharmonische schoof is. In het bijzonder geldt:

Lemma

Zij $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof op X die voldoet aan (H3) en (H4) en zij $U \in \mathfrak{U}$. Equivalent zijn:

1. $u \in \mathcal{U}(U)$.
2. u is μ-hyperharmonisch in U (3.5).
3. u is locaal μ-hyperharmonisch in U.

1 ⇒ 2: $u \in \overline{\mathcal{U}}^V_g$ indien $V \in \mathcal{B}_r$, $\overline{V} \subset U$, $g \in \mathcal{C}_c(\partial V)$ en $g \leqslant u$. Pas (3.5) en (3.9.1) toe.

2 ⇒ 3: Evident.

3 ⇒ 1: Volgens (3.3) bestaat er voor elke $x \in U$ een $0 \in \mathfrak{U}(x)$ met u μ-hyperharmonisch in $0 \cap U$.

Uit (H4) volgt $u \in \mathcal{U}(0 \cap U)$. □

4.11. Opgave

Zij $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof op X. In de notaties van (2.16) en (3.8) geldt:

1. ${}^f\overline{H}^U_g = \overline{H}^U_{fg}/f$, ${}^f\underline{H}^U_g = \underline{H}^U_{fg}/f$, met ${}^f\overline{H}^U_g$ en ${}^f\underline{H}^U_g$ de boven- en benedenoplossing met randwaarde g, t.a.v. de schoof $\mathcal{U}_f$.

2. fg resolutief t.a.v. $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ g resolutief t.a.v. $\mathcal{U}_f$.
3. U resolutief t.a.v. $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ U resolutief t.a.v. $\mathcal{U}_f$.
4. Als $(X,\mathcal{U})$ een harmonische ruimte is, dan ook $(X,\mathcal{U}_f)$.

4.12. Opgave

Zij $X = \mathbb{R}$ en zij, voor $U \in \mathfrak{U}$, $\mathcal{U}(U)$ de verzameling der s.o.i. functies $u: U \to (-\infty,\infty]$, niet stijgend op intervallen.

1. $(X,\mathcal{U})$ is een harmonische ruimte, $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ bestaat uit de locaal constante functies, elk interval (a,b) is resolutief en $\mu_x^{(a,b)} = \varepsilon_b$ (puntmaat).
2. Vervanging van "niet-stijgend" door "niet-dalend" geeft een andere harmonische ruimte, met dezelfde harmonische functies en dezelfde resolutieve verzamelingen.

4.13. Opgave

1. De eis (4.6.1.a) is essentieel. Kies nl. in het voorbeeld (K4.4) de randfunctie $g = 0$ op ∂B, $g(0) = 1$. Hiervoor geldt $\alpha \log \frac{1}{\rho} \in \overline{\mathcal{U}}_G^U \cap \underline{\mathcal{U}}_g^U$ voor elke $\alpha > 0$, indien we deze eis zouden laten vallen.
2. In (K4.4) geldt $H_f^U = 1$ (kies boven- en benedenfuncties van de gedaante $1 \pm \frac{\varepsilon}{\rho}$).

4.14. De rest van deze paragraaf geeft voornamelijk constructiemethoden voor nieuwe hyperharmonische functies.

Lemma

Zij $(X,\mathcal{U})$ een harmonische ruimte en $U \in \mathfrak{U}$.

1. $u,v \in \mathcal{U}(U) \Rightarrow \inf(u,v) \in \mathcal{U}(U)$.
2. $(u_\alpha)\uparrow \subset \mathcal{U}(U) \Rightarrow \sup u_\alpha \in \mathcal{U}(U)$.

1: Dit volgt uit lemma (4.10) en (3.3).

2: Elke u_α is μ-hyperharmonisch. Voor $V \in \mathcal{B}_r$, $\overline{V} \subset U$, $u = \sup u_\alpha$ en $x \in V$ geldt nu $u(x) = \sup u_\alpha(x) \geqslant \sup(\mu^V u_\alpha)(x) = (\mu^V u)(x)$. □

4.15. Lemma

Zij $(X,\mathcal{U})$ een harmonische ruimte en $U \in \mathfrak{U}$.

1. U resolutief, $f: \partial U \to (-\infty,\infty]$ s.c.i., naar beneden begrensd en positief buiten een compactum, dan $\mu^U f \in \mathcal{U}(U)$.
2. $V \in \mathcal{B}_r(U)$, $W \subset V$, $u \in \mathcal{U}(U)$, $\mu^V u \leq h \in \mathcal{H}(W)$ op $W \Rightarrow \mu^V u \in \mathcal{H}(W)$.
3. $V \in \mathcal{B}_r(U)$, $W \in \mathcal{B}_r(V)$, $u \in \mathcal{U}(U) \Rightarrow \mu^W(\mu^V u) = \mu^V u \leq \mu^W u$ op W.

1: Pas (4.14.2) en (1.6.1) toe.

2: Pas het convergentieaxioma toe.

3: Uit (1) en (4.10.2) volgt $\mu^W \mu^V u \leq \mu^W u$. Stel $u_n = \mu^V(\inf(n,u))$, dus $u_n \in \mathcal{H}(V)$ volgens (2), daar $H_n^V \in \mathcal{H}(V)$. Op W geldt nu $u = \sup u_n = \sup \mu^W u_n = \mu^W(\sup u_n) = \mu^W \mu^V u$. □

4.16. De volgende uitspraak is fundamenteel in elke locale potentiaaltheorie:

Theorema

$U,V \in \mathfrak{U}$, $U \subset V$, $u \in \mathcal{U}(U)$, $v \in \mathcal{U}(V)$, $\tilde{u} = 1_{V \setminus U} v + 1_U \inf(u,v)$, dan $\tilde{u}$ s.c.i. $\Rightarrow \tilde{u} \in \mathcal{U}(V)$.

Voldoende is het bewijs van $\mu^W \tilde{u} \leq \tilde{u}$ voor elke $W \in \mathcal{B}_r$ waarvoor er een strict positieve harmonische functie e bestaat in een omgeving van $\overline{W} \subset V$ (4.10). Uit $\mu^W \tilde{u} \leq \mu^W v \leq v = \tilde{u}$ in $W \setminus U$ volgt dat $\mu^W \tilde{u} \leq \tilde{u}$ in $W \cap U$ voldoende is, dus ook $H_f^W \leq \tilde{u}$ in $W \cap U$ voor alle $f \in \mathcal{C}(\partial W)$, $f \leq \tilde{u}$.

Zij $w \in \underline{\mathcal{U}}_f^W$. Op $\partial U \cap W$ geldt $\hat{\tilde{u}} \geq \hat{u} \geq v \in \overline{\mathcal{U}}_f^W$, dus $\hat{\tilde{u}} \geq w$ (4.7.1) Op $\partial W \cap U$ geldt $\widehat{\tilde{u}-w} \geq \tilde{u}+\widehat{(-w)} \geq \tilde{u}-f \geq 0$. Het resultaat volgt dus, indien $U \cap W$ een MP-verzameling is. Zij daartoe $t \in \mathcal{U}(U \cap W)$, met $\hat{t} \geq 0$ op $\partial(U \cap W)$. Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt kennelijk $s = 1_{W \cap U} \inf(t+\varepsilon e,0) \in \mathcal{U}(W)$ (1.4) en $\hat{s} \geq 0$ op ∂W, dus $s \geq 0$, $t+\varepsilon e \geq 0$ en $t \geq 0$. □

4.17. Gevolg

Elk open deel van een MP-verzameling is een MP-verzameling.

Zij V een MP-verzameling, $V \supset U \in \mathcal{U}$, $K \in \mathcal{K}$, $u \in \mathcal{U}(U)$, $u \geqslant 0$ op $U \setminus K$ en $\hat{u} \geqslant 0$ op ∂U. De functie $\tilde{u} = 1_U \inf$ (4.0) is s.c.i., hyperharmonisch op V, positief op $V \setminus K$ en ∂V. □

4.18. Gevolg

Zij $V \in \mathcal{U}$, $U \in \mathcal{B}_r$, $\bar{U} \subset V$. Voor $u \in \mathcal{U}(V)$ noteren we
$u_U = 1_{V \setminus \bar{U}}\, u + 1_{\partial U} \inf(u, \widehat{\mu^U u}) + 1_U \mu^U u$. Uit $u_U > -\infty$ volgt
$u \geqslant u_U \in \mathcal{U}(V)$.

Het middenstuk van de definitie en (4.15.1) garanderen dat u_U s.c.i. is en dat $u \geqslant u_U \in \mathcal{U}(U)$. Kies weer $W \subset \mathcal{B}_r$, met $\bar{W} \subset U$ en $f \in \mathcal{C}(\partial W)$ met $f \leqslant u_U$. Alleen het bewijs van $\mu^U u \geqslant \mu^W f$ op $U \cap W$ is niet triviaal. Voldoende daartoe is $t \geqslant s$ op $U \cap W$ voor $s \in \underline{\mathcal{U}}_f^W$ en $t \in \bar{\mathcal{U}}_u^U$. Merk nu op dat $\widehat{t-s} \geqslant 0$ op $\partial(U \cap W)$ en dat $U \cap W$ een MP-verzameling is. □

Voor $-u \in \mathcal{U}(V)$ definiëren we $u_U = -((-u)_U)$.

4.19. Opgave

1. Als voor twee harmonische ruimten $(X, \mathcal{U}_1)$ en $(X, \mathcal{U}_2)$ geldt $\mathcal{U}_1(U) \subset \mathcal{U}_2(U)$ voor elke U, dan ook $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ (pas bijv. (3.9.1.) toe).
2. Als $(X, \mathcal{U})$ een harmonische ruimte is en $U \in \mathcal{U}$, dan is $(U, \mathcal{U}_U)$ eveneens een harmonische ruimte (2.2.5.).

§ 5. Resolutiviteit

5.1. Naast het eerder genoemde onderzoek van het randgedrag van de gegeneraliseerde oplossing zijn de volgende problemen van belang.

1. Beschrijving van de klasse der resolutieve randfuncties.
2. Beschrijving van de resolutieve verzamelingen.
3. Het verband tussen H_f^U en μ_f^U, voor U en f resolutief.
4. De eenduidigheid van de operator $(f,U) \mapsto H_f^U$, onder de in (K4.4) gegeven condities.

Klassiek geldt dat H_f^U inderdaad eenduidig is (Brelot [12]), dat elke U resolutief is en dat resolutiviteit van f equivalent is met μ_x^U-integreerbaarheid.

In deze paragraaf beperken we ons tot enige algemene structurele uitspraken. Voor verdergaande resultaten zijn nieuw theoretische hulpmiddelen en soms ook extra axioma's nodig. $(X,\mathcal{U})$ is steeds een harmonische ruimte.

5.2. Stelling

Voor $U \in \mathcal{U}$ is $\mathcal{H}_+(U) - \mathcal{H}_+(U)$ een volledig vector tralie.

Zij $A = \mathcal{H}_+(U)$ De volgende eisen moeten geverifieerd worden: A-A is een lineaire ruimte, $A+A \subset A$, $\lambda A \subset A$ voor $\lambda \geqslant 0$, $A \cap (-A) = \{0\}$ (dus A-A is een geordende lineaire ruimte), u en $v \in A$ bezitten een kleinste majorant in A en uit $(u_\alpha)\uparrow \subset A$, $u_\alpha \leqslant u \in A$ volgt $\sup u_\alpha \in A$. Alleen de voorlaatste eis is niet triviaal.

Zij $\mathcal{F}$ de verzameling der in U hyperharmonische majoranten van u en v. Hiervoor geldt $u+v \in \mathcal{F}$, $s,t \in \mathcal{F} \Rightarrow \inf(s,t) \in \mathcal{F}$ en $s \in \mathcal{F}$, $V \in \mathcal{B}_r(U) \Rightarrow s_V \in \mathcal{F}$ (4.18). Bovendien geldt $s_V \in \mathcal{H}(V) \cap \mathcal{F}$ indien $s \leqslant u+v$ (4.15.2), dus $\inf \mathcal{F} = \inf\{s_V : s \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{B}_r(U)\} \in$ $\in \mathcal{H}(U)$ (H2). □

K5.3. Opgave

1. Uit (K2.11) volgt $u \in \mathcal{L}_+(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ u is constant (Picard).

2. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \neq \mathcal{L}_+(\mathbb{R}^3) - \mathcal{L}_+(\mathbb{R}^3)$.

5.4. Lemma

Zij U een MP-verzameling en $f_n: \partial U \to \overline{\mathbb{R}}$. Uit $f_n \uparrow f$ en $(\overline{H}^U_{f_n}) \subset \mathcal{H}(U)$ volgt $\overline{H}^U_{f_n} \uparrow \overline{H}^U_f$.

Evident is $\lim \overline{H}^U_{f_n} \leq \overline{H}^U_f$. Kies $x \in U$, en voor elke $n, v_n \in \overline{\mathcal{U}}^U_{f_n}$ met $\varepsilon_n > 0$ en $v_n(x) \leq \overline{H}^U_{f_n}(x)+\varepsilon_n$. De functie $v = \lim \overline{H}^U_{f_n} + \Sigma(v_n - \overline{H}^U_{f_n})$ is hyperharmonisch in U (4.14.2) en $v \in \overline{\mathcal{U}}^U_f$, d.w.z.
$\overline{H}^U_f(x) \leq v(x) \leq \lim \overline{H}^U_{f_n}(x) + \Sigma\varepsilon_n$. □

5.5. Voor een MP-verzameling U is voortaan $\mathcal{R}$ (of $\mathcal{R}(U)$) de verzameling der eindige resolutieve randfuncties en $\mathcal{R}_0$ de verzameling der $f \in \mathcal{R}$ met $|f| \in \mathcal{R}$.

Stelling

1. $\mathcal{R}$ is een geordende lineaire ruimte.
2. $\mathcal{R}_0$ is een σ-volledig vectortralie en $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_+$.
3. De afbeelding $f \mapsto H^U_f$ is lineair en monotoon op $\mathcal{R}$, met $\mathcal{R}_0$ als volledig origineel van $\mathcal{H}_+(U) - \mathcal{H}_+(U)$.
4. De afbeelding $f \mapsto H^U_f$ is een traliemorfisme van $\mathcal{R}_0$ in $\mathcal{H}^+(U) - \mathcal{H}^+(U)$.
5. Voor $(f_n)\uparrow \subset \mathcal{R}$ geldt $\lim f_n \in \mathcal{R}$ precies dan als $\lim H^U_{f_n} \in \mathcal{H}(U)$. In dat geval geldt $H^U_{\lim f_n} = \lim H^U_{f_n}$. Idem voor $\mathcal{R}_0$.

1 : Volgt uit (4.7).

2-4: Voor $f \in \mathcal{R}_0$ geldt $2f^+ = |f|+f$ en $2f^- = |f|-f$, d.w.z. $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_+$ en $H^U_{\mathcal{R}_0} \subset \mathcal{H}_+(U) - \mathcal{H}_+(U)$. Stel nu omgekeerd $f,g \in \mathcal{R}$ met $H^U_f, H^U_g \in \mathcal{H}_+(U) - \mathcal{H}_+(U)$. Volgens (5.2) bestaat er een kleinste harmonische majorant h van H^U_f en H^U_g. Voor $u \in \overline{\mathcal{U}}^U_f$ en $v \in \overline{\mathcal{U}}^U_g$ geldt $h+u-H^U_f+v-H^U_h \in \overline{\mathcal{U}}^U_{\sup(f,g)}$ (ga na), dus ook $h \geq \overline{H}^U_{\sup(f,g)} \geq \underline{H}^U_{\sup(f,g)}$. Evenzo geldt $-h \geq \overline{H}^U_{\inf(-f,-g)} = -\underline{H}_{\sup(f,g)}$, m.a.w. $\sup(f,g) \in \mathcal{R}$ en $h = H^U_{\sup(f,g)}$. Uit de

de keuze $f = -g$ volgt nu $\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathcal{R}: H_f^U \in \mathcal{H}_+(U)-\mathcal{H}_+(U)\} \supset \mathcal{R}_+-\mathcal{R}_+$. De rest van de uitspraken is nu evident, uitgezonderd de σ-volledigheid die uit (5) volgt.

5 : De noodzaak is evident. Pas (5.4) toe en merk op dat $H_{f_n}^U \leq \underline{H}_{\lim f_n}^U \leq \overline{H}_{\lim f_n}^U = \lim H_{f_n}^U$. □

5.6. Stelling

Voor U resolutief, $x \in U$ en $f: \partial U \to \overline{\mathbb{R}}$ geldt

$$\underline{H}_f^U(x) \leq \int_* f d\mu_x^U \leq \int^* f d\mu_x^U \leq \overline{H}_f^U(x).$$

Zij $u \in \overline{\mathcal{U}}_f^U$ en g de restrictie van $\hat{u}$ tot ∂U; g is een s.c.i. majorant van f en positief buiten een compactum. Voor elke $h \in \mathcal{C}_c(\partial U)$ met $h \leq g$ geldt $u(x) \geq \overline{H}_g^U(x) \geq H_h^U(x) = \int h d\mu_x^U$, dus ook $u(x) \geq \int^* g d\mu_x^U \geq \int^* f d\mu_x^U$ en $\overline{H}_f^U(x) \geq \int^* f d\mu_x^U$. Vervang nu f door $-f$. □

5.7. Gevolg

Voor U resolutief, $x \in U$, $f: \partial U \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i., naar beneden begrensd en positief buiten een compactum, geldt $\underline{H}_f^U(x) = \int^* f d\mu_x^U$.

Voor $h \in \mathcal{C}_c(\partial U)$ met $h \leq f$ geldt nu $\int h d\mu_x^U = H_h^U(x) \leq \underline{H}_f^U(x)$. □

Opgave

1. In (5.6-7) is alleen gebruik gemaakt van het feit dat $\mathcal{U}$ een hyperharmonische schoof op de locaal compacte ruimte X is.
2. Volgens een resultaat van de la Vallée Poussin geldt klassiek in (5.6) steeds het gelijkteken. Bewijs dat in de axiomatische theorie hiervoor voldoende is $\overline{H}_f^U(x) = \int^* f d\mu_x^U$ voor $f: \partial U \to (-\infty,\infty]$ s.c.i., positief buiten een compactum.

5.8. Voor U resolutief kan (5.5) nu verbeterd worden. Voor $f \in \mathcal{R}$ en $x \in U$ geldt dat f μ_x^U-integreerbaar is. Voor $f \in \mathcal{R}_0$ geldt dat

$\mu^U|f| \in \mathcal{H}(U)$. Omgekeerd:

Stelling

Zij U resolutief, $f: \partial U \to \overline{\mathbb{R}}$ μ_x^U-integreerbaar voor elke $x \in U$ en $\mu^U|f| \in \mathcal{H}(U)$. Voor de absolute resolutiviteit van f is voldoende dat f een Baire-functie is.

De verzameling der Baire-functies op ∂U is de kleinste verzameling M die $\mathcal{C}_c(\partial U)$ bevat en met de eigenschap $(f_n) \subset M$, $f_n \downarrow g$ of $f_n \uparrow g \Rightarrow g \in M$. Deze verzameling is een tralie en elke $g \in M$ bezit een σ-compacte drager (ga na). Uit (4.15.2.) volgt dat met f ook f^+ en f^- aan alle genoemde eisen voldoen. We mogen dus verder $f \geq 0$ veronderstellen. Uit (5.5.5) en (4.15.2) volgt dat we bovendien $f \leq g \in \mathcal{C}_c(\partial U)$ mogen veronderstellen: kies $(g_i)\uparrow \subset \mathcal{C}_c^+(\partial U)$, met $\inf(g_i, f) \uparrow f$.

Zij nu $N = \{h \in M: \inf(g,h^+) \in \mathcal{R}\}$. Wederom uit (5.5.5) volgt $N \supset M$, dus ook $f = \inf(g,f^+) \in \mathcal{R}$. □

5.9. Gevolg

Zij U resolutief en laat ∂U een aftelbare basis bezitten. Noodzakelijk en voldoende voor het absoluut resolutief zijn van f is dat f μ_x^U-integreerbaar is voor elke $x \in U$ en $\mu^U|f| \in \mathcal{H}(U)$.

Op dezelfde wijze als in (5.8) volgt dat we $0 \leq f \leq g \in \mathcal{C}_c(\partial U)$ mogen veronderstellen. Elke positieve s.c.i. of s.c.s. minorant van g is limiet van een monotone rij in $C_c^+(\partial U)$ en dus resolutief volgens (5.8). Merk nu op dat

$$\mu^U f = \sup\{\mu^U h: 0 \leq h \leq f,\ h \text{ s.c.s.}\} = \sup\{H_h^U: 0 \leq h \leq f, h \text{ s.c.s.}\} \leq$$
$$\leq \underline{H}_f^U \leq \overline{H}_f^U \leq \inf\{H_h^U: f \leq h \leq g,\ h \text{ s.c.i.}\} = \inf\{\mu^U h:$$
$$f \leq h \leq g,\ h \text{ s.c.i.}\} = \mu^U f.$$ □

Voor $U \in \mathcal{U}_c$ wordt aan de eis $\mu^U|f| \in \mathcal{H}(U)$ voldaan indien f begrensd is (2.14).

Toevoeging bij het voorbeeld van blz. 32

Er moet nog worden bewezen, dat er geen van u verschillende, harmonische functie v bestaat die in alle randpunten de goede randwaarden (nl resp. ε en $1+c_0$) heeft. Beschouw het verschil u-v. Deze functie nadert in alle randpunten, uitgezonderd één ervan, tot 0 en overigens is zij begrensd. Noem dit randpunt ξ en de euclidische afstand tot ξ zij r. Dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$

$$|u-v| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Dit volgt uit vergelijking van de randwaarden. Daaruit volgt $u = v$.

§ 6. Resolutiviteit en syperharmonische functies

6.1. Een noodzakelijke voorwaarde voor de resolutiviteit van f is het harmonisch zijn van de functies $\overline{H}_f^U$, $\underline{H}_f^U$ en $\mu^U f$ (als U resolutief is). Het onderzoek hiervan is vaak gebaseerd op het volgende schema. De verzameling der bovenfuncties van f is inf-stabiel en bevat met u ook u_V, indien $V \in \mathcal{B}_r(U)$. Klassiek volgt dan de harmoniciteit van $\overline{H}_f^U$ voor begrensde f bijv. uit het feit dat de constante functies $\mathcal{L}$-harmonisch zijn. Voldoende is echter ook al dat er een bovenfunctie u en een benedenfunctie v bestaan, met u_V en $v_V \in \mathcal{L}(V)$. Deze eigenschap past in de axiomatische theorie:

6.2. Definitie

Zij $U \in \mathcal{U}$. Een functie $u \in \mathcal{U}(U)$ heet superharmonisch in U, notatie $U \in \mathcal{S}(U)$, indien $\mu^V u \in \mathcal{H}(V)$ voor elke $V \in \mathcal{B}_r(U)$. Een functie u heet subharmonisch in U als $-u \in \mathcal{S}(U)$.

Lemma

1. $\mathcal{S}(U)$ is een inf-stabiele deelkegel van $\mathcal{U}(U)$
2. $\mathcal{S}$ is een schoof.
3. $u \in \mathcal{U}(U)$ locaal begrensd $\Rightarrow$ $u \in \mathcal{S}(U)$.
4. $u \in \mathcal{U}(U)$, $v \in \mathcal{S}(U)$, $u \leqslant v$ $\Rightarrow$ $u \in \mathcal{S}(U)$.
5. $u \in \mathcal{S}(U)$, $V \in \mathcal{B}_r(U)$, $u_V > -\infty$ $\Rightarrow$ $u_V \in \mathcal{S}(U)$.
6. $u \in \mathcal{S}(U)$ $\Rightarrow$ u eindig op een dicht deel van U.

(1) en (4) volgen uit (4.15.2), (2) en (3) uit (4.15.2-3), (5) uit (4) en (4.18). □

*K6.3. Klassiek zijn de superharmonische functies inderdaad de in (3.1-2) ingevoerde functies. Elke open verzameling is dan nl. resolutief (9.8) en er geldt:

Lemma

Zij $U \in \mathcal{U}$ en $u \in \mathcal{L}^*(U)$. Equivalent zijn

1. $u \in \mathcal{S}(U)$.
2. u is locaal integreerbaar.
3. u is b.o. eindig.
4. u is eindig op een dicht deel van U.

1 ⇒ 2: Voldoende is de integreerbaarheid van u over $B(x,\rho)-B(x,\frac{1}{2}\rho)$, voor $\overline{B}(x,\rho) \subset U$. Volgens (4.15.3) geldt

$$-\infty < \int_{B(x,\rho)\setminus B(x,\frac{1}{2}\rho)} u(z)ds(z) = \int_{\frac{1}{2}\rho}^{\rho} d\rho' \int_{\partial B(x,\rho')} u(z)d\sigma(z) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}\rho}^{\rho} 4\pi\rho'^2 u_{B(x,\rho')}(x)d\rho' \leqslant \int_{\frac{1}{2}\rho}^{\rho} 4\pi\rho'^2 u_{B(x,\frac{1}{2}\rho)}(x)d\rho' < \infty.$$

2 ⇒ 3 ⇒ 4: Evident.

4 ⇒ 1: Dit volgt uit de in (K2.13) in feite bewezen sterkere convergentie eigenschap. □

6.4. De kenmerkende gelaatstrekken van de Perron-Wiener-Brelot methode zijn bevat in:

Definitie

Een familie $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}(U)$ heet een Perron-familie indien

1. $\mathcal{G}$ is naar links filtrerend.
2. $\mathcal{G}$ bezit een subharmonische minorant.
3. Er bestaat een overdekking $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_r(U)$ van U, met voor elke $V \in \mathcal{B}$: $u_V \in \mathcal{G}$ voor elke $u \in \mathcal{G}$ en $u_V \in \mathcal{H}(V)$ voor zekere $u \in \mathcal{G}$.

Voor elke overdekking $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_r(U)$ en $u \in \mathcal{S}(U)$, voorzien van een subharmonische minorant, is de collectie der functies $u_{V_1 \ldots V_n} = (\ldots(u_{V_1})_{V_2}\ldots)_{V_n}$, $V_1,\ldots,V_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, de kleinste Perron-familie die u bevat, de door u en $\mathcal{B}$ voortgebrachte Perron-familie.

6.5. Stelling

Zij $\mathcal{G}$ een Perron-familie op U. De functie $u = \inf \mathcal{G}$ is harmonisch in U.

Spiek bij het laatste deel van het bewijs van (5.2). □

Volgens de stelling van Dini is de convergentie uniform op compacte delen van U.

6.6. Gevolg

Zij $\mathcal{F}$ een verzameling in U hypoharmonische functies, met een majorant $u \in \mathcal{S}(U)$. Zij $v \in \mathcal{F}$ subharmonisch. $\mathcal{F}$ bezit een kleinste in U hyperharmonisch majorant u_0 en $u_0 \in \mathcal{H}(U)$.

De verzameling $\mathcal{G}$ der hyperharmonische majoranten u', met $u' \leq u$, van $\mathcal{F}$ voldoet aan (6.5), daar uit $V \in \mathcal{B}_r(U)$, $u' \in \mathcal{G}$, $v' \in \mathcal{F}$ volgt $u'_V \geq v'_V \geq v'$. □

6.7. Gevolg

Laat $u \in \mathcal{S}(U)$ een subharmonische minorant v bezitten. De functie u bezit een grootste hypoharmonische minorant; deze is harmonisch en is het inf van elke door u voortgebracht Perron-familie.

Pas (6.6) toe op $\mathcal{F} = \{-u\}$ en merk op dat het inf van elke door u voortgebrachte Perron-familie een harmonische minorant is. □

6.8. We passen dit nu toe op het resolutiviteitsonderzoek.

Lemma

Zij U een MP-verzameling en $f: \partial U \to \overline{\mathbb{R}}$.

1. $\overline{\mathcal{U}}_f^U \cap \mathcal{S}(U) \neq \emptyset$ en $\underline{\mathcal{U}}_f^U \cap (-\mathcal{S}(U)) \neq \emptyset \Rightarrow \overline{H}_f^U$ en $\underline{H}_f^U \in \mathcal{H}(U)$.
2. Als U bovendien resolutief is, dan $\mu^U f \in \mathcal{H}(U)$.

1: De boven- en benedenfuncties van f voldoen aan de voorwaarden van (6.5).

2: Voor f s.c.i., naar beneden begrensd en positief buiten een

compactum volgt dit uit (5.7) en (1). Voor f willekeurig en $u \in \mathcal{S}(U)$ bovenfunctie van f geldt dus $\mu_{\hat{u}}^{U} \in \mathcal{H}(U)$. Pas nu (H2) en (1.6) toe. □

6.9. Het bestaan van een superharmonische bovenfunctie voor f en -f kan als volgt worden afgedwongen.

Definitie

$(X,\mathcal{U})$ heet $\mathcal{S}$-harmonisch indien er voor elke $x \in X$ een $u \in \mathcal{S}_+(X)$ bestaat, met $u(x) > 0$.

Ga na dat deze eis in het klassieke geval triviaal vervuld is. Wegens (H1) is elke harmonische ruimte locaal $\mathcal{S}$-harmonisch. Bewijs zelf dat in de definitie bovendien $u(y) < \infty$ verondersteld mag worden, voor een gegeven punt y. Daar $\mathcal{S}(U)$ een convexe kegel van s.c.i. functies is volgt uit (6.8.1):

Stelling

Zij $(X,\mathcal{U})$ $\mathcal{S}$-harmonisch. Voor $U \in \mathcal{U}$ en $f: \partial U \to \mathbb{R}$ begrensd met compacte drager geldt $\overline{H}_f^U$ en $\underline{H}_f^U \in \mathcal{H}(U)$.

6.10. Samenvattend:

Voor U resolutief en X $\mathcal{S}$-harmonisch vormen de begrensde Baire-functies met compacte drager een (grote) deelverzameling van de resolutieve randfuncties. In de nu volgende paragrafen zal bewezen worden dat elke open verzameling resolutief is, mits aan een nog iets sterker axioma voldaan wordt. Voor het bewijs hiervan zijn nieuwe hulpmiddelen nodig, nl. de begrippen potentiaal en balayage.

§ 7. Resolutiviteit en potentialen

* K7.1. Het standaardvoorbeeld van een potentiaal is de electrostatische potentiaal p, voortgebracht door een ladingsverdeling μ' binnen een geaard metalen vat. Deze voldoet aan (PV) $\Delta_3 p = -4\pi\mu'$ en aan $p = 0$ op ∂U. Behalve met de methode van (K4.1) kan dit probleem ook als volgt geattaqueerd worden.

Zij $x \mapsto G(x,y)$ de potentiaal veroorzaakt door een eenheidslading in $y \in U$. Het ligt voor de hand dat voor willekeurige μ' zal gelden $p(x) = {}_U\int G(x,y)\mu'(y)\, ds(y)$. Voor $U = \mathbb{R}^3$ en $\partial U = \{\infty\}$ geldt $G(x,y) = 1/\|x-y\|$. Met behulp van de methode van (K2.3) bewijst men nl. gemakkelijk dat ${}_{\mathbb{R}^3}\int \frac{\Delta_3\phi(x)}{x-y}\, ds(x) = -4\pi\phi(y)$ voor elke $\phi \in \mathcal{C}_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^3)$. (Vergelijk (K3.2). Voor U willekeurig, maar voldoende net t.a.v. het probleem van Dirichlet, ligt het nu eveneens voor de hand dat zal gelden $G(x,y) = 1/\|x-y\| - H_f^U(x)$, met f de restrictie van $x \mapsto 1/\|x-y\|$ tot ∂U.

Voor het geval dat U een bol is, is G de in (K2.4) gedefinieerde Greenfunctie. Meer algemeen worden functies van het type $p(x) = {}_U\int G(x,y)\mu'(y)ds(y)$ <u>Green-potentialen</u> genoemd. In het geval $U = \mathbb{R}^3$, dus $G(x,y) = 1/\|x-y\|$, spreekt men van <u>Newton-potentialen</u>. Merk op dat voor de functie v in (K4.1) een Newton-potentiaal kan worden gekozen.

Het hierboven gegeven procédé kan (nog) niet geïmiteerd worden in de axiomatische theorie. Voor $\mu' \geqslant 0$ maakt het gestelde in de 1e alinea het echter plausibel dat potentialen superharmonische functies zijn waarvan de grootste harmonische minorant 0 is. Het exacte bewijs hiervan wordt gegeven in de reeds in (K3.2) aangestipte theorie van Riesz. We gaan hier in omgekeerde volgorde te werk.

7.2. Uit (6.7) volgt onontkoombaar de volgende

Definitie

Een functie $p \in \mathcal{S}_+(U)$, $U \in \mathcal{U}$, heet een potentiaal in U, notatie $p \in \mathcal{P}(U)$, indien $h \in \mathcal{H}_+(U)$, $h \leqslant p \Rightarrow h = 0$.

Lemma

1. $\mathcal{P}(U)$ is een inf-stabiele deelkegel van $\mathcal{S}(U)$, en zelfs
2. $u \in \mathcal{U}_+(U)$, $u \leqslant p \in \mathcal{P}(U) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(U)$.
3. $U \in \mathcal{U}_c$ MP-verzameling, $p \in \mathcal{S}(U)$, $\lim_{U \ni y \to x} p(y) = 0$ voor elke $x \in \partial U \Rightarrow p \in \mathcal{P}(U)$.

7.3. Theorema (Ontbindingsstelling van Riesz)

Zij u een superharmonische functie in $U \in \mathcal{U}$, voorzien van een subharmonische minorant u_0. Er bestaat precies één voorstelling $u = p+h$, met $p \in \mathcal{P}(U)$ en $h \in \mathcal{H}(U)$. Bovendien is h de grootste (hypo-)harmonische minorant van u en h is het inf van elke door u voortgebrachte Perron-familie. De functies p en h worden het potentiaal deel en het harmonische deel van u genoemd.

Zij h de door (6.7) geleverde grootste hypoharmonische minorant. Voldoende is nu het bewijs van $u-h \in \mathcal{P}(U)$ en van de eenduidigheid van de voorstelling. Evident is $p \in \mathcal{S}_+(U)$. Uit $p \geqslant h' \in \mathcal{H}_+(U)$ volgt $u \geqslant h+h'$, $h \geqslant h+h'$ en $h' = 0$, dus $p \in \mathcal{P}(U)$. Zij tenslotte ook $u = p'+h'$, met $p' \in \mathcal{P}(U)$ en $h' \in \mathcal{H}(U)$. Uit $u \geqslant h' \in \mathcal{H}(U)$ volgt $h' \leqslant h$, maar dan ook $p' \geqslant h-h' \geqslant 0$, dus $h = h'$ en $p = p'$. □

7.4. Opgave

Bewijs dat de door (7.3) op $\mathcal{S}_+(U)$ gedefinieerde afbeeldingen $u \mapsto p$ en $u \mapsto h$ additief en positief homogeen zijn.

7.5. Gevolg

Voor $U \in \mathcal{U}$ en $p \in \mathcal{S}_+(U)$ zijn equivalent

1. $p \in \mathcal{P}(U)$.
2. Het inf van elke door p voortgebracht Perron-familie is 0.

3. Het inf van een door p voortgebrachte Perron-familie $\mathcal{G}$ is 0.

4. $u \in \mathcal{U}(U)$, $u+p \geqslant 0 \Rightarrow u \geqslant 0$.

5. $-u \in \mathcal{U}(U)$, $u \leqslant p \Rightarrow u \leqslant 0$.

$1 \Rightarrow 2$ volgt uit (7.3), $2 \Rightarrow 3$ is triviaal evenals $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

$3 \Rightarrow 4$: Voor $t \in \mathcal{G}$ geldt $t+u = p_{V_1 \ldots V_n} + u \geqslant (p+u)_{V_1 \ldots V_n} \geqslant 0$ voor zekere $V_1, \ldots, V_n$, dus ook $u = u+0 = u+\inf \mathcal{G} \geqslant 0$. □

7.6. Gevolg

$(p_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{P}(U)$, $p = \Sigma\, p_\alpha \in \mathcal{S}(U) \Rightarrow p \in \mathcal{P}(U)$.

Zij $p \geqslant h \in \mathcal{H}_+(U)$. Voor elk eindig deel J van I geldt $\mathcal{P}(U) \ni \sum_{\alpha \in J} p_\alpha \geqslant h - \sum_{\alpha \in I \setminus J} p_\alpha \in -\mathcal{U}(U)$, dus $h - \sum_{\alpha \in I \setminus J} p_\alpha \leqslant 0$. Volgens (6.2.6) is $p = \sup_J \sum_{\alpha \in J} p_\alpha$ eindig op een dicht deel D van U. Op D geldt dan $h = 0$, dus ook op U. □

7.7. We vervolgen nu het resolutiviteitsonderzoek. Zij U een MP-verzameling en $p \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{C}(X)$. Evident is $p \in \overline{\mathcal{U}}_p^U$, dus $p \geqslant \overline{H}_p^U$. Voor $x \in \partial U$ geldt tevens $\limsup_{U \ni y \to x} \overline{H}_p^U \leqslant \lim_{y \to x} p(y) = p(x)$, terwijl $\overline{H}_p^U \in \mathcal{H}(U)$ volgens (6.8.1). Voor $U \in \mathcal{U}_c$ zou bovendien gelden $\overline{H}_p^U \leqslant 0$ buiten een compactum, d.w.z. $\overline{H}_p^U \in \underline{\mathcal{U}}_p^U$, $\overline{H}_p^U \leqslant \underline{H}_p^U \leqslant \overline{H}_p^U \in \mathcal{H}(U)$ en de restrictie van p tot ∂U is resolutief. Voor $U \notin \mathcal{U}_c$ hoeft dit echter niet het geval te zijn. Volgens een idee uit [27] is dit defect als volgt te repareren:

Definitie

Zij $p \in \mathcal{P}(U)$. Een Evans-functie van p is een $u \in \mathcal{U}_+(U)$, met $\{x \in U: (p-\varepsilon u)(x) > 0\}$ voorwaardelijk compact in U voor elke $\varepsilon > 0$.

Zij nu $x \in U$ en u een Evans-functie van p met $u(x) < \infty$. In bovenstaande afleiding geldt nu $\overline{H}_p^U - \varepsilon u \in \underline{\mathcal{U}}_p^U$ voor elke $\varepsilon > 0$ en $\overline{H}_p^U(x) = \underline{H}_p^U(x)$. Resumerend:

Stelling

Zij U een MP-verzameling en $p \in \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{P}(X)$. De restrictie van p tot ∂U is resolutief indien p voor deze $x \in U$ een Evans-functie u bezit met $u(x) < \infty$.

7.8. In de volgende paragrafen zal nu bewezen worden dat elke potentiaal dergelijke Evans-functies bezit en dat, onder zekere voorwaarden, de continue potentialen dicht liggen in $\mathcal{C}_c(\partial U)$. Hieruit volgt dan de resolutiviteit van U. De in (5.1.1-3) gestelde problemen laten dus in de axiomatische theorie dezelfde resultaten toe als in de klassieke theorie.

7.9. Opgave

1. Bewijs dat de implicaties $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ in (7.5) ook nog gelden, indien in (7.2) de eis $p \in \mathcal{S}_+(U)$ vervangen wordt door de eis $p \in \mathcal{U}_+(U)$.
2. $U \in \mathfrak{U}$, $h \in \mathcal{H}^+(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$, $h = 0$ op ∂U, $\overline{h} = 1_U h \Rightarrow -\overline{h} \in \mathcal{U}(X)$.
3. $p \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{C}(X)$, $U = \{x: p(x) > 0\} \Rightarrow 1_U p \in \mathcal{P}(U)$.

§ 8. Resolutiviteit en balayage

K8.1. Een van de andere in Gauss [19] behandelde hoofdproblemen van de potentiaaltheorie is het balayage (= veeg) probleem (de naam is van Poincaré). Zij $U \in \mathcal{U}$ en zij μ' een ladingsverdeling in U. Gevraagd wordt een ladingsverdeling op ∂U, die in $\complement \bar{U}$ dezelfde potentiaal voortbrengt als μ'. Een voorbeeld hiervan is te vinden in het verschijnsel van de electrostatische influentie. Hierbij wordt het veld van een uitwendige lading gecompenseerd door een ladingsverdeling op de rand. Reeds Newton echter wist dat de potentiaal veroorzaakt door een geladen bol gelijk is aan die verkregen door alle lading in het middelpunt geconcentreerd te denken. (Wat is dan U?)

* K8.2. Zij V resolutief, zij u een $\mathcal{C}^{(2)}$-superharmonische functie op $\mathbb{R}^3$ en beschouw het Dirichlet probleem met randwaarde u. Het is geen beperking $u \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ te veronderstellen, d.w.z. u is de door de ladingsverdeling $\mu' = -4\pi\Delta u$ voortgebrachte potentiaal. De oplossing u_V van het probleem van Dirichlet bezit een ladingsverdeling $\mu'' = -4\pi\Delta u_V$ en $u_V = u$ in $\complement \bar{V}$, d.w.z. μ'' is de naar $\complement \bar{V}$ gebalayeerde van μ' en u_V is hiervan de potentiaal.

* K8.3. Voor de oplossing van het probleem van Dirichlet met randwaarde u is het echter niet nodig de door u zelf voorgebracht lading naar buiten te vegen. Zij nl. p een nette potentiaal, μ een maat en $\mu^{\complement \bar{V}}$ de naar $\complement \bar{V}$ gebalayeerde van μ. Uit (K7.1) volgt het bestaan van een maat ν, gedragen door $\complement V$, met $\int p(x)d\mu^{\complement \bar{V}}(x) =$

$$= \int p_V(x)d\mu^{\complement \bar{V}}(x) = \iint \|x-y\|^{-1}d\nu(y)d\mu^{\complement \bar{V}}(x) =$$

$$= \int d\nu(y) \int \|x-y\|^{-1}d\mu^{\complement \bar{V}}(x) = \int d\nu(y) \int \|x-y\|^{-1}d\mu(x) =$$

$= \int p_V(x)d\mu(x)$. Aannemend dat er voldoend veel nette potentialen bestaan wordt de balayage van μ naar $\complement \bar{V}$ dus gekarakteriseerd door

de relatie $\int p d\mu^{\complement \overline{V}} = \int p_V d\mu$ voor alle p.

Uit de keuze $\mu = \varepsilon_x$ (puntmaat) volgt tenslotte dat de harmonische maat μ_x^V de naar $\complement \overline{V}$ gebalayeerde van ε_x is.

8.4. Ook deze beschouwingen zijn niet zonder meer vertaalbaar in de axiomatische theorie. Dit wordt omzeild door eerst het begrip balayage van functies in te voeren en daaruit naderhand het begrip balayage van maten af te leiden. Voor ons is echter alleen van belang dat de balayage van functies gebruikt kan worden voor de constructie van hyperharmonische functies en potentialen.

Definitie

Zij $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. De réduite van f is de functie $R_f = \inf\{u \in \mathcal{U}(X)\colon u \geq f\}$. De gebalayeerde van f is de functie $\hat{R}_f$. Voor $A \subset X$ en $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}_+$ schrijven we R_g^A en $\hat{R}_g^A$ i.p.v. $R_{1_A g}$ en $\hat{R}_{1_A g}$.

Zie Brelot [8] voor een eerste systematische bestudering van deze begrippen in de klassieke potentiaaltheorie. We vatten enige elementaire eigenschappen samen:

8.5. Lemma

1. $f \leq h \Rightarrow R_f \leq R_h$, $\hat{R}_f \leq \hat{R}_h$.
2. $R_{f+h} \leq R_f + R_h$, $\hat{R}_{f+h} \leq \hat{R}_f + \hat{R}_h$.
3. $\lambda \geq 0 \Rightarrow R_{\lambda f} = \lambda R_f$, $\hat{R}_{\lambda f} = \lambda \hat{R}_f$.
4. $R_g^{A \cup B} \leq R_g^A + R_g^B$, $\hat{R}_g^{A \cup B} \leq \hat{R}_g^A + \hat{R}_g^B$ voor $B \subset X$.
5. $R_g^A = g$ in A, $\hat{R}_g^A = g$ in $\mathring{A}$ voor $g \in \mathcal{U}_+(X)$.
6. $R_f \in \mathcal{U}(X)$ voor $f > -\infty$ en s.c.i.; $\hat{R}_g^A \in \mathcal{U}_+(X)$.

Volgens de eerste vier uitspraken zijn R en $\hat{R}$ subadditief, stijgend en positief homogeen in f, en zijn $A \mapsto \hat{R}_g^A$ en $A \mapsto R_g^A$ subadditief. Alleen (6) is niet triviaal. Uit $R_f \geq f$ volgt $-\infty < f \leq \hat{R}_f$ s.c.i. In $V \in \mathcal{B}_r$ geldt $\mu^V \hat{R}_f \leq \mu^V R_f \leq \inf\{\mu^V u\colon f \leq u \in \mathcal{U}(X)\} \leq$ $\leq \inf\{u\colon f \leq u \in \mathcal{U}(X)\} = R_f$. Volgens (2.14) en (1.6) is bovendien

$\mu^V\hat{R}_f$ s.c.i.in V, d.w.z. $\mu^V\hat{R}_f \leqslant \hat{R}_f$. Hieruit volgt $\hat{R}_f \in \mathcal{U}(X)$ en $\hat{R}_f = R_f$. Bewijs nu zelf $\hat{R}_g^A = R_{\hat{R}_g^A}$. □

* De uitspraken 1-4 kunnen sterk verbeterd worden. Zie hiervoor bijv. [17], p. 108 e.v.

8.6. In (8.5.6) is R_f superharmonisch als f bovendien een superharmonische majorant bezit. Voor constructiedoeleinden is vooral het volgende resultaat van belang:

<u>Theorema</u>

Zij $f > -\infty$ s.c.i., $f \leqslant v \in \mathcal{S}(X)$, $x \in X$ en $U \in \mathcal{U}$.

1. $-f \in \mathcal{S}(U) \Rightarrow R_f \in \mathcal{H}(U)$.
2. $f \in \mathcal{C}(U)$ en $f < R_f$ op U $\Rightarrow R_f \in \mathcal{H}(U)$.
3. f eindig continu in x $\Rightarrow R_f$ eindig continu in x.

1,2: Uit (4.18) volgt het bestaan van een $W \in \mathcal{B}_r(U)$ en een $h \in \mathcal{H}(W)$, met $f \leqslant h \leqslant R_f$ op W (Kies $h = (R_f)_W$). Voor $V \in \mathcal{B}_r(W)$ geldt dan $(R_f)_V \geqslant h \geqslant f$, $(R_f)_V = R_f$ (4.18) en $R_f \in \mathcal{H}(U)$.
3: Kies $U \in \mathcal{U}(x)$, $h \in \mathcal{H}_+(U)$ met $h(x) = 1$, $\varepsilon > 0$ en $V \in \mathcal{B}_r(U)$ zo dat $x \in V$, $f \leqslant (f(x)+\varepsilon)h$ en $R_f \geqslant (R_f(x)-\varepsilon)h$ op $\overline{V}$. De functie $\tilde{w} = (R_f+2\varepsilon h)_V$ is hyperharmonisch volgens (4.18) en de functie $w = 1_V \inf(R_f,\tilde{w})+1_{\complement V}R_f$ volgens (4.16). Kennelijk geldt $\tilde{w} \geqslant f$ op V, dus ook $w \geqslant R_f$ op X en $\tilde{w} \geqslant R_f$ op V. Hieruit volgt $R_f \leqslant R_f(x)+2\varepsilon$ in V en R_f is continu in x (8.5.6). □

8.7. Het eerste in (7.8) aangekondigde resultaat kan nu bewezen worden:

<u>Stelling</u>

Voor elke $p \in \mathcal{P}(X)$ en $x \in X$ bestaat er een Evans-functie u van p, met $u(x) < \infty$.

Kies een naar rechts filtrerende familie $(f_\alpha) \subset \mathcal{C}_c^+(X)$, met $f_\alpha \leqslant 1$ en sup $f_\alpha = 1$. Zij U_α het inwendige van $\{x: f_\alpha(x) = 1\}$. De functie $(1-f_\alpha)p$ wordt gemajoreerd door p en is subharmonisch in U_α,

d.w.z. $R_{(1-f_\alpha)p} \in \mathcal{H}(U_\alpha)$. Volgens (H2) en (7.2) geldt $\inf_\alpha R_{(1-f_\alpha)p} = 0$. Kies nu $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}_+$ met $\Sigma\, \varepsilon_n < \infty$ en kies een deelrij (α_n), met $R_{(1-f_{\alpha_n})p}(x) \leqslant \varepsilon_n$. De functie $u = \sum_n R_{(1-f_{\alpha_n})p}$ is een Evans-functie van p met $u(x) < \infty$. Uit $\varepsilon > 0$ en $p(y) > \varepsilon u(y)$ volgt nl. $y \in \bigcup_{n<\frac{1}{\varepsilon}} \operatorname{supp} f_{\alpha_n}$ (ga na). □

Elke continue potentiaal is dus resolutief t.a.v. elke MP-verzameling.

8.8. Opgave

Zij X σ-compact, d.w.z. een aftelbare vereniging van compacta. In dit geval kan de familie (f_α) aftelbaar worden gekozen. Bewijs dat u nu bovendien zó kan worden gekozen, dat

1. $u \in \mathcal{P}(X)$ (pas Dini, (6.2.3) en (7.6) toe).
2. $p(y) < \infty \;\Rightarrow\; u(y) < \infty$.
3. p continu in y $\Rightarrow$ u continu in y.

8.9. De begrippen balayage en probleem van Dirichlet zijn ook als volgt met elkaar verweven:

Stelling

Zij U een MP-verzameling en $u \in \mathcal{U}_+(X)$.

1. $\overline{H}_u^U = R_u^{\complement U}$ in U.
2. $u \in \mathcal{S}(X) \;\Rightarrow\; \hat{R}_u^{\complement U} = \overline{H}_u^U$ in U.

1: Voor $v \in \overline{\mathcal{U}}_u^U$ is ook $1_{\complement U} u + 1_U \inf(u,v) \in \overline{\mathcal{U}}_u^U$ (4.16), d.w.z. $R_u^{\complement U} \leqslant \overline{H}_u^U$. Omgekeerd volgt uit $v \in \mathcal{U}_+(X)$, $v \geqslant u$ op $\complement U$ ook $v \in \overline{\mathcal{U}}_u^U$.

2: Volgens (6.8.1) is $\overline{H}_u^U$ harmonisch, dus zeker continu, in U. □

* Voor $u \geqslant 0$ superharmonisch is $\overline{H}_u^U$ een harmonische minorant van u in U. Ter onderscheiding van de grootste harmonische minorant in

U (7.3), wordt deze functie wel de beste harmonische minorant van u in U genoemd. Deze twee minoranten zijn niet automatisch gelijk, zie bijv. [11], § 9.6.

HOOFDSTUK IV

Polaire verzamelingen en capaciteit

De begrippen polaire verzameling en capaciteit spelen een belangrijke rol bij de bestudering van de verdeling van de irreguliere randpunten van een open verzameling Ω. Er wordt een kort overzicht gegeven; enkele bewijzen worden weggelaten of hoogstens aangeduid omdat die worden gevoerd met het begrip balayage, waarvan de theorie in dit college niet wordt gegeven. Men zie hiervoor in de literatuur.

IV.1. Definitie. Een verzameling $E \subset \mathbb{R}^3$ heet polair indien elk punt $x \in E$ een omgeving U_x heeft waarin een superharmonische functie is gedefinieerd die $+\infty$ is in elk punt van $U_x \cap E$.

Dit is een locale definitie, maar men kan overgaan tot een globale vorm wegens de volgende (met de definitie equivalente) eigenschap. Zij Ω open en $E \subset \Omega$ polair. Dan bestaat er een superharmonische functie in Ω die $+\infty$ is in elk punt van E en die eindig is in een willekeurig gegeven vast punt van $\Omega - E$.

Deze functie heet de aan E toegevoegde superharmonische functie. Deze stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten, geeft een uitspraak over de verzameling van de punten waar een superharmonische functie de waarde $+\infty$ heeft. Er bestaat verband tussen irreguliere randpunten en polaire verzamelingen; vergelijk de definitie van een barrière. Polaire verzamelingen zijn zoiets als "verwaarloosbare verzamelingen". Dat wordt nader uitgewerkt in het begrip capaciteit dat later volgt.

Voorbeelden

1. Een verzameling bestaande uit één punt x_0 is polair. Beschouw nl. de functie $x \mapsto \|x-x_0\|^{-1}$.

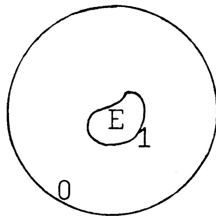
2. Een deelverzameling van een polaire verzameling is polair.
3. De vereniging van aftelbaar veel polaire verzamelingen is polair.
4. Een polaire verzameling heeft de Lebesgue-maat 0. Dit volgt uit het feit dat een superharmonische functie integreerbaar is (dus de punten waar ze $+\infty$ is vormen een nulverzameling).

Voor meer voorbeelden zie Helms, hoofdstuk 7.

IV.2. Het begrip capaciteit

Behandeld wordt de capaciteit van deelverzamelingen van een bol B. Het geval van verzamelingen in een open verzameling Ω brengt geen essentieel nieuwe gezichtspunten.

Zij $B \subset \mathbb{R}^3$ een open bol. Zij $E \subset B$ gesloten; dus B-E open. Neem randwaarden 0 op ∂B en 1 op E (d.w.z. op de rand van E). Volgens de methode van Perron behoort daarbij in B-E een harmonische functie v_E. Men heeft $v_E \leqslant 1$.



Definieer in B een functie v door

$$v = \begin{cases} 1 \text{ op } E \\ v_E \text{ op } B-E. \end{cases}$$

Door een modificatie van de waarden van v in de irreguliere randpunten voor zover behorend tot E (een zogenaamd regularisatieprocédé in verband met de semi-continuïteit) gaat men over op een nieuwe functie, die verder ook weer met v wordt aangegeven. Dan is v een superharmonische functie in B. Deze functie heet de capacitaire potentiaal van E t.o.v. B. De randwaarden van v op ∂B zijn 0. Om te komen tot het begrip capaciteit van E wordt de representatiestelling van Riesz toegepast (in II.2. al aangeduid).

Stelling van Riesz. Zij v een superharmonische functie in B die een harmonische minorant heeft. Dan bestaat er een eenduidig bepaalde maat $\mu \geqslant 0$ op B zó dat

$$v(x) = \int_B G(x,y)d\mu(y)+h(x)$$

waarin h de grootste harmonische minorant van v is.

Pas deze stelling toe op de hiervoor gedefinieerde functie v. Wegens de randwaarden op B is de grootste harmonische minorant van deze v gelijk aan 0. Daar v harmonisch is in B-E is de drager van μ bevat in E. Men vindt dus

$$v = \int_E G(x,y)d\mu(y).$$

Definitie. De maat μ heet de capacitaire maat van E en $\mu(E)$ heet de capaciteit van E t.o.v. B, kortweg de capaciteit van E, genoteerd cap E.

Is E een gesloten verzameling met voldoende regelmatige rand, dan bewijst men dat

$$\text{cap } E = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial E} \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Beschouwt men in plaats van B de gehele ruimte, dan moet men werken met de Newton-potentiaal in plaats van de Greense potentiaal. Men kan de capaciteit ook langs andere weg invoeren. Beschouw de familie $\mathcal{F}$ van positieve superharmonische functies u die $\geqslant 1$ zijn op E. De functie constant = 1 op B behoort tot $\mathcal{F}$ zodat $v = \inf_{u\in\mathcal{F}} u \leqslant 1$. Na een regularisatieprocédé als voren voert dit ook tot de capacitaire potentiaal v. Men heeft nog:

De capacitaire potentiaal v van E is de grootste potentiaal van Green in B van positieve maten met drager in E die $\leqslant 1$ is.

Zij nl. ϕ een dergelijke potentiaal van Green. Dan is

$$\lim_{x\to\xi} \phi(x) = 0 \text{ voor alle } \xi \in \partial B,$$

$$\limsup_{x\to\eta} \phi(x) \leqslant 1 \text{ voor alle } \eta \in \partial E,$$

dus

$$\liminf_{x\to\xi} (u(x)-\phi(x)) \geqslant 0$$

voor alle $\xi \in \partial(B-E)$, $x \in B-E$ en voor alle $u \in \mathcal{F}$.

Daaruit volgt $u \geqslant \phi$ zodat

$$v = \inf u \geqslant \phi,$$

wat te bewijzen was.

Opmerking. Door een analoog procédé voert men in het begrip "gebalayeerde van een maat", dat voor de verdere theorie een belangrijk begrip is.

Hieruit leidt men nog af:

De capaciteit van E is het supremum van de maten $\mu(E)$ van E voor alle maten $\mu \geqslant 0$ waarvoor $G\mu \leqslant 1$ is.

Eigenschappen van de capaciteit en de capacitaire potentiaal.

De capacitaire potentiaal van E wordt verder aangegeven door toevoeging van een index: v^E.

1. Is E een verzameling bestaande uit één punt, dan is cap E = 0. Want de geregulariseerde van de functie v hiervoor is identiek 0. Evenzo is de capaciteit van de lege verzameling 0. Men ziet hieruit wel dat er verband is met de polaire verzamelingen.

2. Als $E_1 \subset E_2$ geldt

$$v^{E_1} \leqslant v^{E_2},$$

$$\text{cap } E_1 \leqslant \text{cap } E_2.$$

Bewijs met de maximumeigenschap.

3. $v^{E_1 \cup E_2} + v^{E_1 \cap E_2} \leqslant v^{E_1} + v^{E_2}$,

$$\text{cap}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}(E_1 \cap E_2) \leqslant \text{cap } E_1 + \text{cap } E_2.$$

Is $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ dan geldt in het algemeen niet het gelijkteken (ga dit na door beschouwing van de randwaarden).

Dus is

$$\text{cap}(E_1 \cup E_2) \leqslant \text{cap } E_1 + \text{cap } E_2.$$

De capaciteit is een subadditieve maat.

Tot nu toe is de capaciteit ingevoerd voor gesloten verzamelingen. Men breidt het begrip uit met methoden analoog aan die, gebruikelijk in de maattheorie.

a) Open verzamelingen

Zij ω open, $\omega \subset B$. Dan definieert men

$$\text{cap } \omega = \sup_{E \subset \omega} \text{cap } E, \quad E \text{ gesloten.}$$

b) Zij E een willekeurige verzameling $\subset B$. Men definieert

$$\text{cap}^* E = \inf_{\omega \supset E} \text{cap } \omega, \quad \omega \text{ open,}$$

en men noemt $\text{cap}^* E$ de uitwendige capaciteit van E.

Voor gesloten E is

$$\text{cap } E = \text{cap}^* E.$$

Bewijs. Zij E gesloten (compact), $E \subset B$. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een open omgeving ω_0 van E zô dat $E \subset E_1 \subset \omega_0$ impliceert $\text{cap } E_1 - \text{cap } E \leqslant \varepsilon$. Dan is

$$\text{cap } E \leqslant \text{cap}^* \omega_0 = \sup_{E_1 \subset \omega_0} \text{cap } E_1 \leqslant \text{cap } E + \varepsilon,$$

$$\text{cap } E \leqslant \text{cap}^* E = \inf_{\omega \supset E} \text{cap } \omega \leqslant \text{cap } E + \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig is

$$\text{cap } E = \text{cap}^* E.$$

Men kan ook een inwendige capaciteit invoeren als het supremum van de capaciteit van gesloten verzamelingen bevat in E, maar men werkt daar niet mee.

De volgende stelling geeft het verband tussen de polaire verzamelingen en de uitwendige capaciteit.

Stelling. Zij $E \subset B$. E is polair dan en slechts dan als $\text{cap}^* E = 0$.

Bewijs. Stel E is polair. Beschouw een aan E toegevoegde superharmonische functie; splits deze in een Greense potentiaal en een harmonische functie volgens de stelling van Riesz. Deze laatste

functie is begrensd. Er bestaat dus een begrensde maat $\mu > 0$ op B waarvan de potentiaal van Green gelijk aan $+\infty$ is op E. Zij $\alpha > 0$. Zij

$$\omega_\alpha = \{x \in B \mid G\mu(x) > \alpha\}.$$

Daar $G\mu$ beneden semi-continu is, is ω_α een open omgeving van E. Zij $K \subset \omega_\alpha$ en K compact. Dan is, als μ_K de capacitaire maat van K is,

$$\text{cap } K = \int_K d\mu_K \leq \frac{1}{\alpha} \int_K G\mu \cdot d\mu_K$$

want op K is $G\mu > \alpha$. Verwisseling van de integratievolgorde van μ en μ_K geeft voor het rechterlid

$$\frac{1}{\alpha} \int G\mu_K \cdot d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int d\mu$$

(bedenk dat $G\mu_K \leq 1$ is). Dus

$$\text{cap } K \leq \frac{\|\mu\|}{\alpha} .$$

Wegens de definitie van de capaciteit van ω_α volgt daaruit

$$\text{cap } \omega_\alpha \leq \frac{\|\mu\|}{\alpha}$$

voor alle $\alpha > 0$. Verder dan

$$\text{cap}^* E \leq \inf_\alpha \text{cap } \omega_\alpha$$

en als $\alpha \to \infty$ dus

$$\text{cap}^* E = 0.$$

Het bewijs dat een verzameling met uitwendige capaciteit 0 polair is, wordt achterwege gelaten; men construeert via een oneindige reeks een superharmonische functie die $+\infty$ is op E (zie bijv. Brelot, Sorbonne).

De capaciteit van een verzameling hangt af van de open verzameling waarvan men die verzameling als deelverzameling beschouwt. Dat geldt niet voor verzamelingen met uitwendige capaciteit 0: dat is een absoluut begrip. De polaire verzamelingen zijn nl.

locaal gedefinieerd.

Een ander gevolg van deze stelling is de volgende eigenschap:

Zij (E_i) een rij verzamelingen met cap* $E_i = 0$. Zij $E = \bigcup_i E_i$.
Dan is cap* $E = 0$.

Want E_i is polair en dus ook $\cup E_i$.

Deze stelling en de conditie dat een randpunt van een open verzameling dan en slechts dan regulier is als er een barrière bestaat, laat vermoeden dat er verband bestaat tussen de verzamelingen met uitwendige capaciteit 0 en de verzameling van de irreguliere randpunten. Dat dit zo is leert de volgende stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten (het begrip balayage speelt daarin een rol).

Stelling. De verzameling van de irreguliere randpunten van een open verzameling Ω heeft een uitwendige capaciteit gelijk aan 0.

In de verdere ontwikkeling aangaande irreguliere randpunten doen zich nu twee - met elkaar verband houdende - richtingen voor.
Men gaat over op een fijnere topologie dan de euclidische topologie, de zgn. "fijne topologie", waarbij alle superharmonische functies continu worden. Daardoor elimineert men de randpunten.
Men hanteert een gecompliceerdere compactificatie van de ruimte dan de Alexandroff compactificatie door toevoeging van één punt.
Een open verzameling krijgt dan een van de euclidische rand verschillende rand, de zgn. rand van Martin. Daarmee kan men een generalisatie geven van de Poisson-integraal voor willekeurige open verzamelingen, leidende tot een representatie van harmonische functies door middel van een integraal uitgestrekt over die Martin-rand.
Er is een generalisatie van de capaciteit, de zgn. Choquet-capaciteit, een subadditieve maat gedefinieerd voor verzamelingen in een topologische ruimte, onafhankelijk van de potentiaaltheorie.

LITERATUUR

Klassiek

Kellog, Foundations of potential theory.

Sternberg, Elemente der Potentialtheorie

Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Modern

Helms, Introduction to potential theory.

Brelot, Eléments de la théorie classique du potentiel (Sorbonne).